Geometria lukion matematiikassa

Anne-Mari Lepistö

26. toukokuuta 2013

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author
Anne-Mari Emilia Lepistö

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Geometria lukion matematiikassa

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Toukokuu 2013	75 sivua + 7 liitesivua

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä sitä, miten geometria ilmenee lukion matematiikassa. Aineistona on käytetty lukion matematiikan oppikirjoja, lukion matematiikan ylioppilaskirjoituksia ja lukion valtakunnallisia opetussuunnitelman perusteita. Tutkimuksessa viitataan myös peruskoulun yläluokkien matematiikan osa-alueeseen geometria. Tutkielmassa on tarkoitus vastata seuraaviin kolmeen tutkimuskysymykseen: Miten geometrian opetus lukiossa eroaa pitkän ja lyhyen oppimäärän osalta? Miten erot näkyvät oppikirjoissa, opetussuunnitelmassa ja ylioppilaskirjoituksissa? Millaisia geometrian tietoja ja taitoja tarvitaan ylioppilaskoetehtävien ratkaisemiseen? Tutkimusaineiston analysoinnissa merkittävässä roolissa olivat tutkijan luomat taulukot, jotka ovat tutkimuksen liitteenä. Lisäksi syvällisemmin on analysoitu ylioppilaskokeiden tehtäviä, joiden haastavuutta ja syvällisyyttä on tarkasteltu Bloomin taksonomian teoriapohjaan verraten.

Lukion matematiikan pitkä ja lyhyt oppimäärä eroavat geometria-kurssin osalta toisistaan tiettyjen sisältöalueiden osalta. Eroavaisuudet ovat hyvin yhtenäiset, kun tarkastellaan geometria-kurssien oppikirjoja ja verrataan niitä opetussuunnitelman perusteisiin. Olennaisimmat erot ovat seuraavat. Lyhyessä oppimäärässä matemaattisena sisältönä esiintyy geometria koordinaatistossa - aihealue, joka puuttuu pitkästä oppimäärästä. Lyhyen oppimäärän OPS asettaa käytännön läheisten geometrian ongelmien ratkaisun tavoitteeksi pitkästä oppimäärästä poiketen. Tätä selkeää eroa ei voida tehdä oppikirjavertailun perusteella. Toisaalta lyhyen oppimäärän oppikirjoista ja OPS:sta puuttuvat lähes kokonaan pitkään verrattuna seuraavat sisältöalueet ja käsitteet: sini- ja kosinilause, kappaleiden yhdenmuotoisuus, geometristen lauseiden todistaminen, kolmion pinta-alan trigonometrinen kaava, kuvioiden ja kappaleiden kulmat (syventävämmän matematiikan kannalta), kulmiin liittyvät tarkemmat määritykset, ympyrä ja siihen liittyvät suorat sekä palloon liittyvät erikoistilavuudet.

Ylioppilaskirjoituksissa lyhyen oppimäärän kannalta korostuvat tehtävissä juuri OPS:ssa mainitut geometrian kurssin keskeiset sisällöt, geometriaa koordinaatistossa -aihealuetta lukuun ottamatta. Pitkän oppimäärän kokeet eivät noudata niin selkeää linjaa OPS:n keskeisten sisältöjen suhteen. Suuren osan lyhyen oppimäärän ylioppilaskoetehtävistä pystyisi ratkaisemaan myös peruskoulun yläluokkien tiedoin, tosin usein syventävin sellaisin. Suurin osa tehtävistä sijoittui Bloomin taksonomian tasoille kolme ja neljä, eli tehtävissä tuli joko käyttää oikeaa kaavaa tehtävän ratkaisuun tai pilkkoa ongelma pienempiin osiin ja ymmärtää osien merkitys kokonaisratkaisun kannalta. Pitkän oppimäärän tehtävät sijoittuivat keskimääräisesti Bloomin taksonomian tasolle neljä ja tehtävissä piti normaalisti joko soveltaa ja pilkkoa tietoa tai jopa luoda uutta tietoa annettujen tietojen pohjalta. Vain muutama pitkän oppimäärän tehtävistä oli mahdollista ratkaista lyhyen oppimäärän tiedoin. Pitkän oppimäärän tehtävät ovat joko liian haastavia tai niiden matemaattiset sisältöalueet eivät kuuluneet lyhyen oppimäärän sisältöihin.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords
Opetus, lukio, matematiikka, geometria, ylioppilaskirjoitukset, Bloomin taksonomia

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited
Helsingin yliopisto, Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

tiivistelmä.pdf

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä sitä, miten geometria ilmenee lukion matematiikassa. Tutkielma keskittyy tarkastelemaan aihetta sekä lukion geometrian lyhyen että pitkän oppimäärän osalta. Tutkielmassa tarkastellaan aiheeseen liittyen lukion oppikirjoja, opetussuunnitelman perusteita ja ylioppilaskirjoituksia. Tutkimuksen tarkoituksena on selvittää, mitä geometrian sisältöalueita lukion geometriakurssien opetukseen sisältyy ja miten geometrian opetus eroaa lyhyen ja pitkän matematiikan osalta. Lisäksi tutkielman tarkoituksena on saada selville, näkyvätkö nämä erot ylioppilaskirjoituksissa. Tutkimus on rajattu koskemaan lukion geometrian kursseja, eikä siinä ole huomioitu muita geometrian osa-alueita käsitteleviä kursseja. Tällaisia kursseja ovat muun muassa analyyttinen geometria- ja vektorikurssit. Tutkielmassa viitataan myös peruskoulun yläluokkien geometrian opetukseen OPS:n ja oppikirjojen kautta, sillä peruskoulun matematiikan käsitteet ovat vahvasti sidoksissa lukion geometriassa esiin tuleviin käsitteisiin.

Tutkielma on rakennettu siten, että ensin luvussa 2 perehdytään tutkimuksen tutkimuskysymyksiin, tutkimuksen suorittamisen lähtökohtiin sekä aiempiin tutkimuksiin. Luvussa 3 käsitellään lyhyesti geometrian perusteita historian ja nykypäivän valossa. Luvussa 4 valotetaan opetussuunnitelman perusteiden kautta lukion pitkän ja lyhyen matematiikan geometria-kurssien eroja ja yhtäläisyyksiä. Luvussa 5 siirrytään lukion oppikirjojen sisältöalueiden tarkasteluun ja kiinnitetään myös huomiota siihen, miten hyvin oppikirjojen ja opetussuunnitelman perusteiden suosittelemat sisältöalueet vastaavat toisiaan. Luvussa 6 tarkastellaan tarkemmin peruskoulun oppikirjoja ja verrataan niiden sisältöalueita lukion oppikirjoissa esiintyneisiin sisältöalueisiin. Luvussa 7 tarkastellaan ylioppilaskirjoituksia geometrian näkökulmasta ja peilataan tuloksia aiempien lukujen tuloksiin. Ylioppilaskoetehtävien tarkastelua jatketaan syvällisemmin Bloomin taksonomian kautta luvussa 8. Luvussa 9 käsitellään tutkimuksen luotettavuutta. Viimeisessä luvussa 10 luodaan yhteenvetona vastauksia tutkimuskysymyksiin muun muassa lukion lyhyen ja pitkän oppimäärän eroista geometrian kursseilla. Antoisia lukuhetkiä geometrian parissa!

Luku 2

Tutkimuskysymykset ja tutkimuksen suorittaminen

Tutkimus on suoritettu vuosina 2012-2013 Helsingissä. Aineistona on käytetty lukion matematiikan oppikirjoja, lukion matematiikan ylioppilaskirjoituksia ja lukion valtakunnallisia opetussuunnitelman perusteita. Tutkimuksessa on käytetty nykyistä käytössä olevaa nuorten lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteita, joka on laadittu vuonna 2003. Oppikirjat on valittu niin, että ne noudattavat nykyistä opetussuunnitelmaa. Ylioppilaskirjoituksista on valittu uusimmat eli vuosien 2010-2012 ylioppilaskokeet. Ylioppilaskokeet on huomioitu niin kevään kuin syksynkin osalta. Tutkimuksessa viitataan myös peruskoulun yläluokkien matematiikan osa-alueeseen geometria. Tähän viitaten tutkimuksessa on ollut aineistona myös peruskoulun yläluokkien opetussuunnitelman perusteet sekä oppikirjat koskien peruskoulun luokkia 7-9. Tutkimuksessa on käytetty nykyisin voimassa olevaa perusopetuksen opetussuunnitelman perusteita, joka on laadittu vuonna 2004. Myös tutkimuksessa käytetyt peruskoulun oppikirjasarjat noudattavat kyseistä opetussuunnitelmaa.

Tutkittavan aineiston pohjalta tutkimuksessa on pyritty luomaan vastauksia tutkimuskysymyksiin. Tutkimukselle asetetut tutkimuskysymykset ovat seuraavat:

1. Miten geometrian opetus lukiossa eroaa pitkän ja lyhyen oppimäärän osalta?
2. Miten erot näkyvät oppikirjoissa, opetussuunnitelmassa ja ylioppilaskirjoituksissa?
3. Millaisia geometrian tietoja ja taitoja tarvitaan ylioppilaskoetehtävien ratkaisemiseen?

2.1 Tutkimuksen suorittamisen vaiheet

Tutkimuksessa käytetty aineisto on kerätty monessa osassa. Aineisto on kerätty oppikirjoista, Opetussuunnitelman perusteista sekä lukion ylioppilaskirjoituksista. Seuraavassa luettelossa on kerrottu vaiheittain aineiston keruun ja analysoinnin vaiheet.

- Tutkimusta varten on tarkasteltu lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteita, joka on laadittu vuonna 2003. Lukiokoulutuksen OPS:sta on kiinnitetty erityistä huomiota lyhyen ja pitkän oppimäärän geometria-kurssien kurssikuvauksiin sekä näiden kurssien tavoitteisiin sekä keskeisiin sisältöihin. Kurssin tavoitteet ja keskeiset sisällöt on kirjattu ensin auki, jonka jälkeen ne on taulukoitu (Taulukko 1) niin, että lyhyt ja pitkä oppimäärä ovat omina sarakkeinaan. Taulukossa keskeiset sisältöalueet ja tavoitteet on pyritty sijoittamaan taulukon eri riveille siten, että lyhyen ja pitkän oppimäärän samanlaiset tavoitteet sekä sisältöalueet olisivat vierekkäisillä riveillä. Asettelun jälkeen on tummennettu ja alleviivattu kohdat, jotka eroavat oppimäärien kohdilla toisistaan. Näin geometriakurssien oppimäärien kesken erot ja yhtäläisyydet OPS:n mukaan on saatu näkyväksi. Tutkimuksen analysointivaiheessa nämä erot ja yhtäläisyydet on kirjoitettu tarkemmin auki kappaleissa 4.4 ja 4.5.

- Perusopetuksen opetussuunnitelmasta tutkimukseen aineistoksi on valittu perusopetuksen vuosiluokkien 6-9 geometrian keskeiset sisällöt. Perusopetuksen, vuonna 2004 laaditusta, OPS:sta ei tehdä tutkimukseen niin tarkkaa analyysia kuin lukion OPS:sta, koska perusopetus ei ole tutkimuksen keskeinen kiinnostuksen kohde. Perusopetuksen OPS:a tarkkaillaan tutkimuksessa, jotta voidaan nähdä, mitkä lukion OPS:n mukaisista lyhyen ja pitkän oppimäärän yhteisistä sisältöalueista löytyvät myös perusopetuksen yläluokkien OPS:n sisällöistä.

- Tutkimuksen aineistoksi on valittu lukion oppikirjoista kaksi lyhyen oppimäärän ja kaksi pitkän oppimäärän geometria-kurssin oppikirjaa. Tutkimuksessa on kartoitettu kaikki oppikirjoista löytyvät sisältöalueet ja luokiteltu ne kolmisivuiseksi taulukoksi (Liite 1). Oppikirjojen sisältöalueiden tarkastelu toteutettiin hyvin huolellisesti ja myös sisältöalueiden painotuksia kirjoissa on merkitty taulukkoon eri merkinnöin. Taulukoinnin tarkoituksena on selvittää, mitkä sisältöalueet eroavat toisistaan esiintyvyytensä perusteella lyhyen ja pitkän oppimäärän välillä. Ne sisältöalueet, jotka eivät esiinny tietyssä oppikirjassa lainkaan näkyvät taulukossa tummennettuna ruutuna. Näin niin tutkijan kuin tutkimuksen lukijankin on helppoa tulkita taulukon avulla ne sisältöalueet, jotka eivät esiinny tietyssä oppikirjassa lainkaan.

  Taulukoinnin analysoinnin avulla tutkimuksessa on selvitetty oppikirjojen pohjalta lukion pitkässä oppimäärässä korostuvat sisältöalueet, jotka eivät esiinny lyhyen oppimäärän oppikirjoissa lainkaan. Tätä tulkintaa varten on tehty vielä erityistä tarkentavaa tutkimusta todistustehtäviin liittyen. Oppikirjoista on käyty läpi kaikki harjoitustehtävät yksitellen ja eritelty niistä todistustehtävät eli tehtävät, joissa on tehtävänä todistaa, johtaa tai selkeästi perustella jokin lause, kaava tai johtopäätös. Todistustehtävien määrää on verrattu kukin oppikirjan harjoitustehtävien kokonaismäärään. Näin on saatu selville kirjakohtaiset todistustehtävien prosenttiosuudet.

Taulukon (Liite 1) analysointia on jatkettu selvittämällä oppikirjojen mukaan lyhyessä oppimäärässä korostuvat sisältöalueet, jotka puuttuvat pitkästä oppimäärästä. Tämän jälkeen analyysiosiossa käsitellään vielä muita huomioita sisältöalueista. Tätä analyysia varten selvitettiin tehtävien käytännön kontekstiriippuvuutta erillisen taulukon (Taulukko 2) avulla. Molempien oppimäärien oppikirjoista käytiin läpi kaikki harjoitustehtävät ja kirjattiin ylös ovatko tehtävät liitetty käytännön kontekstiin. Käytännön kontekstiin liitetyssä tehtävässä voidaan puhua esimerkiksi pallonmuotoisesta appelsiinista ja ilman kontekstia olevassa tehtävässä pallosta vain muotona. Käytännön kontekstissa olevia tehtävämääriä verrattiin kirjakohtaisiin harjoitustehtävien kokonaismääriin ja näin saatiin selville kyseisten tehtävien prosenttiosuudet.

Lukion oppikirja-analyysin avulla tutkimuksessa saatiin selville myös yhtäläisyyksiä oppikirjojen välille. Tässä tutkimuksessa pääpaino on selvittää erityisesti yhtäläisyyksiä oppimäärien välillä, eikä niinkään oppikirjojen välille saman oppimäärän sisällä. Tutkimuksessa on kirjoitettu luettelona lista niistä sisältöalueista, jotka esiintyvät kaikissa oppikirjoissa eli toisin sanoen ovat yhteisiä sisältöalueita lukion lyhyelle ja pitkällä oppimäärälle geometrian kursseilla.

- Lukion OPS:ssa ja oppikirjoissa löydettiin tutkimuksessa selkeitä eroja lyhyen ja pitkän oppimäärän välille geometria kurssin suhteen. Näitä eroja luokitellaan tarkemmin taulukossa (Taulukko 3), jossa on käsitelty niitä pitkän oppimäärän sisältöalueita, jotka selkeästi puuttuvat lyhyen oppimäärän sisällöistä. Taulukoinnin tarkoitus on saada selville, noudattavatko lukion OPS ja oppikirjat samanlaista linjaa asian suhteen.

- Peruskoulun yläluokkien 7-9 oppikirjoja on tarkasteltu tarkemmin kolmisivuisen taulukon (Liite 2) avulla, jossa peruskoulun oppikirjojen sisältöalueita on verrattu lukion oppikirjojen sisältöalueisiin. Tutkimuksen pääpaino on lukion oppimäärien tarkastelussa, mutta peruskoulun oppikirjojen tarkastelulla voidaan selvittää se, mitä lukion geometrian sisältöalueita harjoitellaan jo peruskoulun yläluokkien matematiikassa. Peruskoulun oppikirjatarkasteluun on valittu kaksi kirjasarjaa, joissa on kummassakin yhteensä kolme oppikirjaa, yksi kullekin luokka-asteelle. Koska tutkimuksen pääpaino on lukion opetuksen tutkimisessa, on peruskoulun oppikirjojen sisältöalueista huomioitu vain lukio-opetuksessa esille tulevat. Tämä on tehty siitäkin syystä, että useat peruskoulun geometrian sisältöalueet ovat lukiokäsitteiden esitietoja. Taulukoinnin analysoinnissa erityisenä kiinnostuksen kohtana ovat taulukon tummennetut ruudut, jotka kertovat siitä, että kyseistä sisältöaluetta ei löydy kyseisestä oppikirjasta lainkaan. Esimerkiksi, jos joku sisältöalue on tummetuin ruuduin peruskoulun ja lukion lyhyen oppimäärän kohdalla ja merkitty koodilla pitkän oppimäärän kohdalla se merkitsee, että sisältöaluetta käsitellään vain lukion pitkän oppimäärän geometriassa.

- Lukion ylioppilaskirjoituksia geometrian osalta on tutkittu erittelemällä vuosien 2010-2012 ylioppilaskokeen tehtävistä geometrian tehtävät. Ylioppilaskokeiden tehtävät on käyty molempien oppimäärien osalta läpi kahteen kertaan ja molemmista tutkimuskerroista tutkija teki omat muistiinpanonsa. Tämän jälkeen tutkija yhdisti muistiin panonsa ja tarkasteli jokaista geometriaan liittyvää tehtävää erikseen. Joidenkin tehtävien kohdalla muistiinpanot poikkesivat toisistaan eli esimerkiksi toisella tarkastelukerralla tehtävän oli todettu olevan geometrian tehtävä ja toisella kerralla ei. Tämänlaisten tehtävien käsittelyyn käytettiin erityisen paljon aikaa. Osa geometrian tehtävistä osoittautui lopulta muiden kurssien sisältöalueiden mukaisiksi. Näitä tehtäviä on käsitelty omassa luvussaan ja kerrottu perustiedot niiden kurssien sisällöistä, joiden sisältöalueet ovat lähellä geometriakurssien sisältöä.

  Kun tutkimuksessa saatiin kartoitettua geometriaa koskevat ylioppilastehtävät, ryhdyttiin luokittelemaan tehtäviä sisältöalueidensa mukaisesti taulukkoon (Liite 1). Taulukossa on lyhyen ja pitkän oppimäärän tehtävät luokiteltu omiin sarakkeisiinsa. Samassa taulukossa on käsitelty lukion oppikirjojen sisältöalueita, joten geometrian sisältöalueet ovat samat kuin oppikirjojen luokittelussa. Ylioppilaskokeen tehtävät on merkitty kirjain-numerokoodein sen sisältöalueen riville, mitä kukin ylioppilaskoetehtävä kulloinkin koskee. Sama tehtävä voi olla merkittynä useankin sisältöalueen riville, sillä samassa tehtävässä voi esiintyä useita geometrisia käsitteitä. Osa ylioppilaskoetehtävä sarakkeiden ruuduista on tyhjiä ja se tarkoittaa, että mikään tutkittavista ylioppilaskoetehtävistä ei koskenut kyseistä sisältöaluetta. Luokittelun jälkeen tutkimuksessa on analysoitu taulukosta ilmeneviä tuloksia.

- Kaikissa aiemmissa aineiston analyyseissa on keskitytty geometrian opetuksen keskeisten sisältöalueiden, käsiteiden ja tavoitteiden luokitteluun ja erotteluun. Analyyseissa ei ole kuitenkaan huomioitu esimerkiksi käsitteiden haastavuutta tai syvällisyyttä. Tämän takia ylioppilaskokeita pyritään tutkimuksessa käsittelemään myös syvällisemmin. Tarkoituksena on selvittää minkälaisia ja kuinka syvällisiä taitoja tarvitaan ylioppilaskokeiden tehtävien ratkaisuun. Tarkastelun kohteena ovat aiemmin käsitellyt vuosien 2010-2012 lyhyen ja pitkän oppimäärän ylioppilaskokeiden geometrian tehtävät. Kukin tehtävänanto on kirjoitettu erikseen. Jokaista tehtävän antoa seuraa tutkijan laatima pohdinta ratkaisuun tarvittavista taidoista sekä niiden syvällisyydestä ja tehtävän haastavuudesta. Ylioppilaskokeiden geometrian tehtävien haastavuutta ja syvällisyyttä on takasteltu Bloomin taksonomian teoriapohjaan verraten. Bloomin taksonomiassa tiedon osaaminen on jaettu kuuteen tasoon. Tehtäväkohtaisten erittelyiden jälkeen analysoidaan ilmi tulleita tuloksia.

2.2 Aiemmat tutkimukset tutkimuksen aiheeseen liittyen

Lukion matematiikan opetusta on tutkittu viime vuosina useassa Pro Gradu - tutkimuksessa. Useimmat tutkimuksista liittyvät johonkin tiettyyn lukion kurssiin lyhyen tai pitkän oppimäärän kohdalta. Osassa tutkimuksista on keskitytty vain tietyn käsitteen, kuten normaalijakauman, käsittelyyn. Tämän tutkimuksen kannalta aiemmista tutkimuksista olivat kiinnostavimmat geometriaan liittyvät tutkielmat. Geometriaa käsitellään muillakin lukion kursseilla kuin varsinaisilla Geometrian kursseilla MAA3 ja MAB2. Johanna Peltokangas (2011) onkin tutkinut lukion pitkän oppimäärän kurssia Analyyttinen geometria Pro Gradu - tutkielmassaan "Analyyttinen geometria lukio-opetuksessa sekä viimevuosien ylioppilaskirjoituksissa". Tämä tutkielma koskee kuitenkin vain varsinaisia geometrian kursseja, joten Peltokankaan tutkielmaa on käytetty tässä tutkielmassa lähinnä Analyyttinen geometria-kurssin sisällön perusolemuksen hahmottamisessa.

Sen sijaan Eini Kuusalo (2010) on kirjoittanut Pro Gradu - tutkielmansa aiheesta "Pitkän matematiikan geometrian opetus lukiossa". Kuusalon tutkielma on otsikointinsa puolesta hyvin lähellä tätä tutkielmaa, mutta sisällöltään hyvin eri asioihin keskittyvä. Kuusalo keskittyy tutkimuksessaan siihen, miten yläkoulun ja lukion matematiikan opetusta voisi kehittää niin, että ne toimisivat paremmin toisiaan tukien. Tutkielmassa esitetään joidenkin geometrian oppisisältöjen siirtämistä lukiosta peruskoulun puolelle sekä kurssien opetusjärjestyksen muutosta lukiossa. Tutkimuksessa pääpaino onkin pitkän oppimäärän kurssien "geometria", "analyyttinen geometria"ja "vektorit"muuntaminen niin, että niistä muodostuisi entistä tiiviimpi kokonaisuus, joka tukisi geometrian ymmärtämistä. Tässä tutkimuksessa ei käsitellä lainkaan "analyyttinen geometria"ja "vektorit- kursseja, vaan pitäydytään ainoastaan geometria- kurssin sisällöissä. Toisaalta tässä tutkimuksessa viitataan yläkoulun geometrian opetukseen kuten Kuusalonkin tutkimuksessa.

Edellä mainitut tutkimukset ovat olleet siis hyvin mielenkiintoisia tämän tutkimuksen alkuvaiheessa, kun tutkimuksen aihe oli vasta muotoutumassa, mutta loppujen lopuksi Peltokankaan ja Kuusalon tutkimuksia ei käytetty juurikaan osana tätä tutkimusta. Tämän tutkimuksen kannalta yksi hyvin mielenkiintoinen tutkielma on Paavo Juutilaisen (2008) kirjoittaman Pro Gradu tutkielma aiheesta "Lyhyen matematiikan ylioppilaskirjoituksista". Juutilainen tutkii tutkielmassaan matematiikan lyhyttä oppimäärää sekä siihen liittyviä ylioppilaskokeita. Juutilainen on tutkinut ylioppilaskokeita vuosilta 2004-2006 ja kartoittanut niistä tietoa siitä, mitä matemaattisia tietoja tarvitaan lyhyen oppimäärän ylioppilaskirjoituksissa menestymiseen. Tutkimuksessa on analysoitu myös geometrian taitojen osuutta sekä tarpeellisuutta. Näitä tietoja käytetään tutkimuksessa vertailukohtana tässä tutkimuksessa esiin nouseville tutkimustuloksille.

Tutkimuksessa käytetään teoriapohjana Bloomin taksonomiaa taidon osaamisen tasoista, kun ylioppilaskoetehtäviä tarkastellaan syvällisemmin. Bloomin taksonomiaa on käyttänyt tutkimuksessaan myös kemian aineen opettaja Anna Tähtinen (2011). Tähtinen on kirjoittanut Pro Gradu - tutkimuksensa aiheesta "Orgaaninen kemia ylioppilaskoetehtävissä vuosina 1996-2011". Tutkielmassaan Tähtinen selvittää orgaanisen kemian tehtävien osuutta ylioppilaskirjoitusten tehtävistä sekä tutkii tehtävien kognitiivista vaativuutta Bloomin taksonomiaan perustuen. Kemian ylioppilaskoetehtävät ovat hieman samantyyppisiä kuin matematiikan tehtävät, joten Tähtisen tapaa luokitella ylioppilaskokeen tehtävien haastavuutta heijastetaan myös tässä tutkimuksessa. Tähtinen on omassa tutkimuksessa tarkastellut hyvin syvällisesti Bloomin taksonomia, sillä puolet tutkimuksesta perustuu niihin. Tässä tutkimuksessa Bloomin taksonomia tarkastellaan hieman yleisemmällä tasolla, mutta Tähtisen luoma linja on ollut hyvänä pohjana tälle tutkimukselle. Tähtinen (2011) viittaa tutkimuksessaan Greta Tikkasen (2010) väitöskirjaan "Kemian ylioppilaskokeen tehtävät summatiivisen arvioinnin välineenä". Tässä tutkimuksessa on käytetty Tikkasen väitöskirjaa apuna laadittaessa Bloomin mukaisia matemaattisten taitojen luokitteluja. Tikkasen väitöskirja koskee kuitenkin kemian tehtävien tarkastelua matematiikan sijaan, joten varsinaisia lainauksia ei ole väitöskirjasta tehty.

Luku 3

Geometrian perusteita

Geometria sanana on aiemmin tarkoittanut maan mittaamista. Aiemmissa historiallisissa kulttuureissa geometrian taitoja tarvittiin muun muassa viljelyspalstojen pinta-alojen mittaamiseen sekä alttareiden ja temppeleiden rakentamiseen. Kuitenkaan ei ole pystytty tarkkaan selvittämään sitä, kehittyikö geometria vain käytännöllisten mittaustarpeiden takia. Vaihtoehtoina on esitetty, että esihistoriallinen ihminen saattoi olla kiinnostunut kuvioiden muodoista vain kuvioiden kauneuden tuottaman mielihyvän takia tai geometriaa saatettiin kehittää muun muassa rituaalisia käytäntöjä varten. Varmuuteen siitä, mikä sai jo kivikautiset ihmiset asukkaat laskemaan, mittaamaan ja piirtämään, ei ole päästy. [7]

Antiikin Kreikassa geometria nostettiin kuitenkin varmuudella käytännön mittaustarpeista riippumattomaan asemaan. Tähän vaikutti antiikin tunnetuin matemaatikko Eukleides, joka kokosi yhteen sen aikaisen alkeismatematiikan teoksessaan "Alkeet". Geometriasta teoksessa tulevat esille muun muassa Pythagoraan lause sekä suunnikkaita ja yhteneviä kolmioita koskevat tulokset. Eukleideen teoksessa on merkittävintä uudenlainen aksiomaattisten menetelmien käyttö, joiden avulla saadaan uutta matemaattista tietoa. Eukleideksen teos oli hyvin merkittävä teos oppikirjana aina 1900-luvulle saakka ja sen suosiosta kertoo hyvin se, että se on raamatun jälkeen maailma käännetyin kirja. [7]

Nykyisin käytössä olevat geometrian käsitteet kehittyivät historian saatossa. Käsitteiden mukaan geometriset kuviot ja kappaleet koostuvat pisteistä, janoista ja suorista. Esimerkiksi kolmio muodostuu sen sivuina olevista janoista ja piirin sisään jäävistä pisteistä. Kappaleet ja kuviot voidaan luokitella muodon perusteella ja kokoa mitata niiden pinta-alan, pituuden ja tilavuuden mukaisesti. Geometriset objektit voidaan jakaa tasokuvioihin ja avaruuskappaleisiin. Tasokuvioiden pisteet kuuluvat kaikki samaan tasoon ja kuviot voidaan jakaa kahteen luokkaan: kuvioihin, joiden reuna muodostuu suorista viivoista ja kuvioihin, joiden reuna sisältää käyriä viivoja. Ensimmäisistä kuvioista esimerkkinä ovat monikulmiot ja jälkimmäisestä ympyrä. Avaruusgeometriassa on tasokuvioiden lisäksi mukana avaruuskappaleita, jotka ovat kolmiulotteisia. Nämäkin voidaan jakaa kahteen luokkaan: niihin, joiden reuna koostuu vain tasokuvioista ja niihin joiden reuna voi koostua myös kaareutuvista osista. Ensimmäisestä luokasta esimerkkinä ovat särmiöt ja pyramidit sekä jälkimmäisestä luokasta ympyrälieriöt ja -kartiot sekä pallo. [7]

Kuvioita ja niihin liittyviä ominaisuuksia voidaan tutkia käyttämällä apuna taso- ja avaruusgeometrian tunnettuja perusolettamuksia ja näistä välittömästi seuraavia tosiasioita. Geometriaa voidaan ratkaista myös soveltamalla siihen esimerkiksi trigonometriaa tai analyyttista geometriaa. Trigonometrian ja analyyttisen geometrian keinot soveltuvat erityisesti laskennallisten ongelmien ratkaisemiseen. [7] Trigonometria on lukiomatematiikassa yhdistetty geometriakurssin sisältöön, joten sitä käsitellään osana tutkimusta. Analyyttinen geometria ja esimerkiksi vektorit, derivointi ja integrointi ovat selkeästi muiden kurssien asiaa, joten ne sivuutetaan tutkimustyössä, vaikka ne voivatkin usein olla hyvänä apuna geometristen ongelmien ratkaisussa. Pääpaino tässä tutkimuksessa on siis geometrian kursseissa, jotka ovat lukion matematiikan pakollisia kursseja niin lyhyessä kuin pitkässäkin matematiikan oppimäärässä.

Nykyisin lyhyessä oppimäärässä geometria-kurssi on yksi kuudesta pakollisesta kurssista ja pitkän oppimäärän puolella geometrian kurssi sisältyy kymmenen pakollisen kurssin joukkoon. Geometria-kurssin merkitys sisältöalueena on siis näin ollen hieman voimakkaampi lyhyen oppimäärän puolella (vertaa lyhyt 1/6 vastaan pitkä 1/10). Geometrian aihe-alueet korostuvat myös muilla lukion matematiikankursseilla, joita ei ole huomioitu tässä tutkimuksessa. Esimerkkinä tälläisesta kurssista on esimerkiksi Analyyttinen geometria- kurssi. Täten geometrian painotuksesta verrattuna muihin lukion matematiikan osa-alueisiin ei voida tehdä varsinaisia johtopäätöksiä ilman tarkampaa tutkimusta.

Geometria-kurssin opinnoilla on vaikutusta myös oppilaan lukion muihin matematiikan kursseihin molemmissa oppimäärissä. Geometrian taitoja tarvitaan esimerkiksi joidenkin prosentti- ja todennäköisyyslaskujen hahmottamisessa. Juutilainen (2008) on Pro Gradu-tutkielmassaan tutkinut lukion lyhyttä oppimäärää ja siihen liittyviä ylioppilaskirjoituksia. Juutilaisen Pro Gradu tutkimuksen mukaan lyhyen oppimäärän ylioppilaskokeissa geometrian tehtäviin oli yhdistetty lähes poikkeuksetta yhtälönratkaisun taitoja. Lisäksi Juutilainen painotti tutkimuksessaan sitä, että geometrian taitojen hallinta oli lyhyen oppimäärän ylioppilaskoemenestyksen kannalta toiseksi ratkaisevin taito yhtälönratkaisutaitojen jälkeen. [9] Pitkän oppimäärän osalta tulee taas huomioida, että varsinkin pitkän oppimäärän opiskelijat tarvitsevat usein geometrian taitopohjaansa myös jatko-opinnoissaan lukion jälkeen.

Luku 4

Opetussuunnitelman perusteet

Suomessa lukioille matematiikan opetuksen pohjaksi ja opetuksen suunnittelun avuksi on luotu lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet. Nykyiset käytössä olevat nuorten lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet laadittiin vuonna 2003 ja ne tulivat voimaan lukioissa viimeistään syksyllä 2005. Lukiokoulutuksen järjestäjän tulee laatia ja hyväksyä lukiokoulutusta varten lukion oma opetussuunnitelma, joka perustuu Opetushallituksen laatimiin lukion opetussuunnitelman perusteisiin. Lukion oman opetussuunnitelman tulee täydentää ja täsmentää perusteissa annettuja keskeisiä sisältöjä ja tavoitteita. Keskeistä on siis, ettei koulutuksen järjestäjä voi poiketa tai jättää noudattamatta opetussuunnitelman perusteita. [17]

Opetussuunnitelman perusteet, eli OPS, on antanut koulutuksen järjestäjille suosituksen siitä, että jos matematiikan oppimäärää vaihdetaan pitkästä lyhyeen niin, geometrian osalta voidaan hyväksi lukea pitkän oppimäärän geometrian kurssi MAA3 lyhyen oppimäärän geometrian kurssiksi MAB2. [17] Seuraavissa alaluvuissa esittelen opetussuunnitelman perusteista suoraan lainaten ne kohdat, jotka koskevat tutkimuksen kohdetta, eli lukion geometrian kursseja MAB2 ja MAA3. Viimeinen alaluku on yhteenveto lyhyen ja pitkän matematiikan geometrian kurssien yhtäläisyyksistä ja eroavaisuuksista opetussuunnitelman perusteiden suhteen.

4.1 Lyhyt oppimäärä, geometrian kurssi MAB2

Opetussuunnitelman perusteiden mukaan kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- harjaantuu tekemään havaintoja ja päätelmiä kuvioiden ja kappaleiden geometrisista ominaisuuksista
- vahvistaa tasokuvioiden ja kolmiulotteisten kappaleiden kuvien piirtämisen taitojaan

- osaa ratkaista käytännön ongelmia geometriaa hyväksi käyttäen.

Kurssin keskeiset sisällöt:

- kuvioiden yhdenmuotoisuus
- suorakulmaisen kolmion trigonometria
- Pythagoraan lause
- kuvioiden ja kappaleiden pinta-alan ja tilavuuden määrittäminen
- geometrian menetelmien käyttö koordinaatistossa.

4.2 Pitkä oppimäärä, geometrian kurssi MAA3

Opetussuunnitelman perusteiden mukaan kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- harjaantuu hahmottamaan ja kuvaamaan tilaa sekä muotoa koskevaa tietoa sekä kaksi- että kolmiulotteisissa tilanteissa
- harjaantuu muotoilemaan, perustelemaan ja käyttämään geometrista tietoa käsitteleviä lauseita
- ratkaisee geometrisia ongelmia käyttäen hyväksi kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksia, yhdenmuotoisuutta,

Kurssin keskeiset sisällöt:

- kuvioiden ja kappaleiden yhdenmuotoisuus
- sini- ja kosinilause
- ympyrän, sen osien ja siihen liittyvien suorien geometria
- kuvioihin ja kappaleisiin liittyvien pituuksien, kulmien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen.

4.3 Geometrian kurssien yhtäläisyydet ja eroavaisuudet OPS:n mukaan

Seuraavassa taulukossa (Taulukko 1) on järjestetty opetussuunnitelman perusteiden antamat geometriankurssien keskeiset sisällöt sekä tavoitteet lyhyen ja pitkän oppimäärän osalta. MAA3- ja MAB2- kurssien keskeiset sisällöt ja tavoitteet on taulukoitu kaikki kohdat huomioiden niin että, on pyritty löytämään samalla niiden yhtäläisyydet ja erot. Alla olevassa taulukossa on **alleviivattu ja lihavoitu** ne **kohdat, jotka** kurssien OPS:ssa **eroavat toisistaan**. Rinnakkain ovat aina yhtenevät asiat. Jos ruutu on kokonaan tyhjä, se tarkoittaa että vastaavaa kurssisisältöä/tavoitetta ei kyseiseltä kurssilta OPS:sta löytynyt. OPS:n mukaiset tavoitteet ja keskeiset sisällöt ilmaistiin joidenkin sisältöalueiden kesken ristiin ja siksi tutkimuksessa on merkitty taulukkoon tavoitteet ja keskeiset sisällöt vain taustaväreillä, kiinnittämättä sen suurempaa huomiota niiden erotteluun jatkokäsittelyssä.

Lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet, geometrian kurssit	
OPS: tavoitteet	
OPS: keskeiset sisällöt	
MAB2-kurssi	MAA3-kurssi
kuvioiden yhdenmuotoisuus	kuvioiden ja **kappaleiden** yhdenmuotoisuus
suorakulmaisen kolmion trigonometria	suora- ja **vino**kulmaisen kolmion trigonometria
Pythagoraan lause	Pythagoraan lause
kuvioiden ja kappaleiden pinta-ala ja tilavuus	kuvioiden ja kappaleiden **pituus, kulmat,** pinta-ala ja tilavuus
käytännön ongelmien ratkaisu geometrialla	geometristen ongelmien ratkaisu
tasokuvioiden ja kolmiulotteisten kappaleiden piirtämisen taitojen vahvistus	kaksi- ja kolmiuloitteisen tilan ja muodon hahmottaminen ja kuvaaminen
havaintojen ja päätelmien tekeminen kuvioiden ja kappaleiden geometrisista ominaisuuksista	ratkaisee geometrisia ongelmia käyttäen hyväksi kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksia
	geometrista tietoa käsittelevien lauseiden muotoilu, käyttö ja perustelu
	ympyrän, sen osien ja siihen liittyvien suorien geometria
	sini- ja kosinilause
geometria koordinaatistossa	

Taulukko 1: OPS:n **erot** ja yhtäläisyydet geometria-kurssien suhteen

4.4 Erot lukion lyhyen ja pitkän oppimäärän välillä

Kun tarkastellaan lyhyen ja pitkän oppimäärän geometrian kurssien OPS:n asettamia kurssien lähtökohtia, voidaan huomata, että niissä on paljon yhteisiä keskeisiä sisältöalueita sekä tavoitteita. OPS:n mukaan lyhyessä oppimäärässä korostuvat pitkää enemmän aiheet "geometria koordinaatistossa"ja "käytännön ongelmien ratkaisu geometrialla". Näitä teemoja ei mainita pitkän oppimäärän MAA3 OPS:ssa lainkaan. Toisaalta **OPS:n mukaan pitkässä oppimäärässä tulisi painottaa** taas **lyhyttä enemmän seuraavia geometrian sisältöjä/aihealueita**:

- kappaleiden yhdenmuotoisuus
- vinokulmaisen kolmion trigonometria
- kuvioiden ja kappaleiden kulmat
- sini- ja kosinilause
- ympyrä ja siihen liittyvät suorat
- geometristen lauseiden käyttö ja perustelu

4.5 Yhtäläisyydet lukion lyhyen ja pitkän oppimäärän välillä

Taulukossa (Taulukko 1) on lueteltu lukion matematiikan lyhyen ja pitkän oppimäärän geometria-kurssien opetussuunnitelman perusteiden mukaiset tavoitteet ja keskeiset sisällöt. Kun tarkastellaan lyhyen ja pitkän oppimäärän tavoitteita ja keskeisiä sisältöjä rinnakkain, voidaan kurssien sisältöalueista löytää selviä yhtäläisyyksiä. Seuraavaan luetteloon on muotoiltu mukailluin ilmauksin ne sisältöalueet, jotka ovat yhteisiä pitkän ja lyhyen oppimäärän geometrian kursseille laadituille opetussuunnitelman perusteille.

Lyhyelle ja pitkälle oppimäärälle yhteiset sisältöalueet:

- kuvioiden yhdenmuotoisuus
- suorakulmaisen kolmion trigonometria
- kuvioiden ja kappaleiden pinta-ala ja tilavuus
- geometristen ongelmien ratkaisu (käyttämällä hyväksi kuvioiden ja kappaleiden geometrisia ominaisuuksia)

- kaksi- ja kolmiulotteisen muodon kuvaaminen

Opetussuunnitelman perusteet antavat siis lyhyelle ja pitkälle oppimäärälle geometrian kurssin suhteen paljon yhteisiä tavoitteita muutamista eroavaisuuksista huolimatta.

4.6 Perusopetuksen yläluokkien OPS suhteessa lukion OPS:an geometrian osalta

Lukion opetussuunnitelman perusteet antavat lukion lyhyelle ja pitkälle oppimäärälle geometrian kurssin suhteen paljon yhteisiä tavoitteita eroavaisuuksista huolimatta. Jos ei kiinnitetä huomiota oppisisältöjen vaikeusasteeseen niin voidaan huomata, että monet yhteisistä sisältöalueista tulevat esille jo perusopetuksen yläluokkien geometrian opetuksessa. Tästä syystä tutkimuksessa tutkitaan hieman myös yläluokkien geometriaan liittyvää opetusta. Seuraavassa luettelossa on esitetty opetushallituksen luomasta perusopetuksen opetussuunnitelman perusteista kohta, jossa kuvataan matemaattisia käsitteitä, jotka ovat perusopetuksen vuosiluokilla 6-9 geometrian keskeiset sisällöt. **Luettelosta** on **tummennettu** ne **kohdat**, jotka **kuvaavat erityisen hyvin lukion** pitkälle ja lyhyelle oppimäärälle yhteisiä **geometrian sisältöalueita**.

OPS:n mukaiset keskeiset sisällöt geometriasta perusopetuksen luokilla 6-9:

- kulmien välisiä yhteyksiä
- kolmioihin ja nelikulmioihin liittyviä käsitteitä
- säännölliset monikulmiot
- ympyrä ja siihen liittyviä käsitteitä
- **tasokuvioiden** piirin ja **pinta-alan laskeminen**
- kappaleiden nimeäminen ja luokittelu
- **kappaleen tilavuuden ja pinta-alan laskeminen**
- **yhdenmuotoisuus** ja yhtenevyys
- **geometrista konstruointia**
- yhtenevyyskuvauksia: peilaukset, kierto ja siirto tasossa
- **Pythagoraan lause**

- kolmion ja ympyrän välisiä yhteyksiä
- **trigonometriaa ja suorakulmaisen kolmion ratkaiseminen**

Pelkkää OPS:a tarkastelemalla ei voida kuitenkaan luoda tarkkaa käsitystä siitä, käsitelläänkö peruskoulun geometrian opetuksessa samanlaisia sisältöalueita kuin lukion geometrian opetuksessa. Perusopetuksen OPS:n tarkastelu herätti kuitenkin tutkijan mielenkiinnon perusopetuksen yhteyksistä lukio-opetuksen sisältöalueisiin ja siksi liittenä (Liite 2) on tarkasteltu perusopetuksen oppikirjojen sisältöalueiden suhdetta lukion keskeisiin oppisisältöihin. Taulukoinnin tavoitteena on saada selville, että onko perusopetuksen ja lukio-opetuksen geometrian opetuksella yhteyksiä, kuten lukion ja perusopetuksen OPS:t vihjaavat. Tähän aiheeseen palataan luvussa "Peruskoulun yläluokkien oppikirjojen tarkastelu".

Luku 5

Lukion geometrian oppikirjojen sisältöalueet

Opettajille opetuksen perustana oppikirjat eivät ole pakollinen ohjenuora, vaan sen sijaan Opetushallituksen luoma opetussuunnitelman perusteet on. Usein opettajat kuitenkin käyttävät oppikirjoja voimakkaasti opetuksensa tukena ja siksi tutkimusta varten on tarkasteltu myös neljää oppikirjaa. Kaksi oppikirjoista on lukion pitkän oppimäärän kirjoja ja kaksi lyhyen oppimäärän teoksia. Valituista kirjoissa on kaksi WSOY:n ja kaksi Tammen kustantamaa teosta. Saman kustantajan kirjoissa on useita samoja kirjoittajia. WSOY: n ja Tammen kirjasarjat eroavat toisistaan niin esitystavoiltaan kuin osaksi sisällöiltäänkin. Tämä on tutkimuksen edun mukaista, jotta kirjat voisivat edustaa parempaa otosta erilaisista oppikirjoista. Neljää oppikirjaa tarkasteltaessa löytyi jo selkeitä linjoja siitä, miten pitkän ja lyhyen oppimäärän sisältöalueet eroavat oppikirjojen osalta.

Tutkimuksessa käytetyt oppikirjat ovat

- Pitkä matematiikka 3 (WSOY)
- Pitkä sigma 3 (TAMMI)
- Lyhyt matikka 2 (WSOY)
- Sigma 2 (TAMMI).

Oppikirjojen tarkastelu toteutettiin seuraavalla tavalla. Tutkimuksen liitteenä olevaan taulukkoon (Liite 1) on koottu kaikki sisältöalueet, jotka kirjoista löytyvät. Taulukossa jokainen sisältöalue on omaksi rivikseen. Poikkeuksena hyvin suppeat sisältöalueet, joita on monia samalla rivillä. Näin kaikki sisältöalueet ovat omilla riveillään taulukon sarakkeessa "käsitteet". Käsitteet -sarakkeen vieressä on matematiikan aihealue -sarake. Tämä sarake kertoo tarkemmin siitä, mihin aihe-alueeseen tietty käsite kuuluu. Esimerkiksi aihealueeseen "kolmio"kuuluvat käsitteet "pinta-ala", "kosinilause"sekä "kulmien summa". Tällöin nämä käsitteet liittyvät juuri kolmion ominaisuuksiin.

Tutkimuksessa tarkastelluille oppikirjoille on kullekin luotu oma sarakkeensa. Sarakkeissa kolme ja neljä löytyvät lyhyen oppimäärän kirjoihin Lyhyt matikka 2 ja Sigma 2 liittyvät tiedot. Viimeisistä sarakkeista seitsemän ja kahdeksan löytyvät pitkän oppimäärän kirjoihin Pitkä matematiikka 3 ja Pitkä sigma 3 liittyvät tutkimustulokset. Jokainen sisältöalue/käsite on taulukoitu omaan rivilleen rastilla kutakin kirjaa koskevan sarakkeen kohdalle, jos sisältöalueen asia löytyy kyseisestä oppikirjasta osana teoriaosuuksien kappaleita. Joissakin tapauksissa sisältöalue ei löytynyt oppikirjoista selkeästi osana teoriaosuuksia. Jos käsite/sisältöalue esitetään oppikirjassa, mutta se on sivuroolissa, kuten osana teoriaosuuden esimerkkejä on tällöin käytetty $\sim$ merkintää rasti-merkinnän sijasta. $\sim\sim$ merkintää on taas käytetty silloin, kun sisältöalue on oppikirjassa vielä vähäisemmässä sivuroolissa, esimerkiksi osana harjoitustehtäviä, esimerkkejä tai oppikirjan ekstraosiota. Tällöin asiaa ei välttämättä edes kutsuta edes sen oikealla nimellä (esimerkiksi "Pythagoraan käännöslause") vaan asiasta kerrotaan yleisesti. Lopuksi, kun sisältöalueet on luokiteltu rasteilla ja $\sim$ merkeillä, taulukosta on tummennettu ne sisältöalueiden kohdat, jotka eivät esiinny oppikirjoissa lainkaan.

Kirjojen sisältöalueet on taulukoitu taulukkoon rastein sekä merkinnöin $\sim$ ja $\sim\sim$, jotta niin tutkijan kuin tutkimuksen lukijankin olisi helppoa ja nopeaa luoda kokonaiskuva siitä kuinka paljon sisältöalueet kirjoissa esiintyvät ja mikä on niiden merkitys kirjan painotuksissa. Erityisesti tarkkailemalla taulukon tummennettuja ruutuja voidaan nähdä ne sisältöalueet, jotka eivät kyseisissä kirjoissa esiinny lainkaan. Erityisesti näiden tummennettujen alueiden kautta voidaan havaita eroavaisuuksia oppikirjojen välillä sisältöalueita koskien. Taulukkoon on yhdistetty myös ylioppilaskokeiden tehtävien tarkastelua sarakkeissa viisi ja kuusi, mutta tämän aiheen käsittelyyn palataan tarkemmin tutkimuksen luvussa "Lukion ylioppilaskirjoitukset geometrian osalta".

5.1 Oppikirjojen sisältöalueiden erot

Pitkän oppimäärän oppikirjoissa oli keskenään pieniä eroja sisältöalueiden painotuksissa sekä esitystavoissa, esimerkiksi Pitkä matematiikka 3 ei käsitellyt pisteen, suoran ja janan käsitteitä eikä kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseita, yhtenevyyslauseita tai merkillisiä pisteitä lainkaan Pitkä sigma 3:sta poiketen. Pitkä sigma 3 ei sisällä taas matematiikan historian käsittelyä oppikirjan osana. Kaiken kaikkiaan pitkän oppimäärän oppikirjat olivat kuitenkin taulukoinnin mukaan hyvin samanlaisia sisältöalueiltaan. Kun tarkastellaan lyhyen oppimäärän oppikirjoja keskenään, voidaan huomata, että myös lyhyen oppimäärän kirjat ovat keskenään sisältöalueiden osalta hyvin samankaltaisia. Suurimana erona voisi mainita sen, että Lyhyt matikka 2 - oppikirjassa ei ole käsitelty janan, suoran ja pisteen sekä tilavuuslauseen käsitteitä Sigma 2 - oppikirjasta poiketen. Muut erot ovat vain sisältöalueen painotukseen liittyviä eroavaisuuksia.

Pitkän ja lyhyen oppimäärän oppikirjoissa ei löydy siis suuria eroja, jos oppikirjoja verrataan sisältöalueittain tietyn oppimäärän sisällä. Suuret erot syntyivätkin pitkän ja lyhyen oppimäärän kirjojen välille kun lyhyttä ja pitkää oppimäärää verrataan keskenään. Tässä tutkimuksessa keskitytäänkin juuri näiden erojen tarkasteluun. Erityisen tarkastelun alla ovat nyt siis taulukon (Liite 1) tummennetut ruudut, jotka luovat selviä eroja oppimäärien välille. Toisin sanoen tutkimuksessa on pyritty nostamaan oppikirjojen sisältöalueista esille ne kohdat, jotka esiintyvät vain toisessa matematiikan oppimäärässä.

5.1.1 Pitkässä oppimäärässä korostuvat sisältöalueet

Kun verrataan pitkän ja lyhyen oppimäärän geometrian oppikirjojen sisältöjä, voidaan huomata, että **lyhyen oppimäärän oppikirjoista puuttuvat** kokonaan **pitkään verrattuna seuraavat sisältöalueet ja käsitteet**:

- minuutti/sekunti/radiaani kulmiin liittyen
- suplementti-, komplementti- ja eksplementtikulma
- kolmion pinta-alan trigonometrinen kaava
- sini- ja kosinilause
- kehäkulma ja siihen liittyvät lauseet
- avaruussuorien välinen kulma, suoran ja tason välinen kulma, kahden tason välinen kulma
- pallokalotin pinta-ala, pallosegmentin tilavuus
- tilavuuslause- kappaleiden yhdenmuotoisuus (lyhyen oppimäärän kirjat sisältää muutamia viittauksia aiheeseen)
- geometristen lauseiden käyttö, todistaminen ja johtaminen (lyhen oppimäärän kirjoissa huomattavasti vähäisempää kuin pitkän kirjoissa)

Edellisen listan viimeisen kohdan, geometristen lauseiden käyttö, todistaminen ja johtaminen, vaatii lisätarkennuksen tutkimuksen osalta. Taulukon (Liite 1) tarkennukseksi laskettiin erikseen todistustehtävien lukumäärää kustakin oppikirjasta. Tutkimuksessa eriteltiin kustakin oppikirjasta ne varsinaiset harjoitustehtävät, joissa oppilaan tulee todistaa, johtaa tai selkeästi perustella jokin kaava, lause tai johtopäätös. Näiden todistustehtävien lukumäärää verrattiin kukin oppikirjan varsinaiseen harjoitustehtävien lukumäärään, jolloin saatiin selville todistustehtävien prosenttiosuudet kussakin oppikirjassa. Esimerkiksi oppikirjan "Sigma 3"oppikirjan 327:stä harjoitustehtävästä 18 tehtävissä piti johtaa, todistaa tai selkeästi perustella tehtävänannon mukaan. Tällöin katsottiin 5,5 % kirjan tehtävistä olevan todistustehtäviä. Todistustehtävien prosenttiosuudet on merkitty taulukkoon (Liite 1) sisältöalueen "todistaminen"kohdalle.

Lyhyen oppimäärän oppikirjoissa todistustehtäviä esiintyy Sigma 2- teoksessa 1,5 % ja Lyhyt matikka-teoksessa 1,0 % kaikista tehtävistä. Lyhyen oppimäärän kirjoissa todistustehtäviä oli siis noin yksi sadasta. Pitkän oppimäärän kirjoissa todistustehtävien määrät olivat selkeästi suurempia: Pitkä sigma 3 oppikirjassa niitä on 5,5 % ja Pitkä matematiikka 3 oppikirjassa 7,8 % kaikista tehtävistä. Pitkän oppimäärän kirjoissa todistustehtäviä oli siis yli viisi tehtävää sataa tehtävää kohden. Pitkän oppimäärän oppikirjoissa korostetaan siis geometristen lauseiden käyttöä, todistamista ja johtamista selkeästi enemmän kuin lyhyen oppimäärän oppikirjoissa.

Pitkän oppimäärän kirjoissa on lisäksi käsitelty **syventävinä tietoina** (ainakin toisessa teoksessa ja esimerkiksi osana ekstra-osiota tai vähemmän painotettuina esimerkkeinä) seuraavia **asioita, joita lyhyen oppimäärän kirjoista ei löytynyt**:

- tylpän kulman sini- ja kosini, sinin ja kosinin symmetria lauseet
- kolmioiden yhdenmuotoisuus ja yhtenevyyslauseet
- kolmion merkilliset pisteet
- muistikolmiot
- Pythagoraan lauseen käänteislause

5.1.2 Lyhyessä oppimäärässä korostuvat sisältöalueet

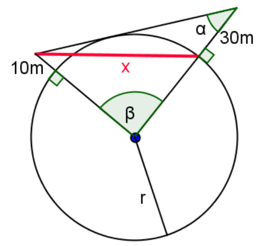
Kaiken kaikkiaan pitkän oppimäärän kirjoista löytyi monia sisältöalueita, joita lyhyen oppimäärän oppikirjojen sisältöalueista ei löydy. Toisaalta voidaan löytää myös muutama eroavaisuus oppikirjojen sisältöalueista, jotka löytyvät lyhyen oppimäärän oppikirjoista, mutta eivät pitkän oppimäärän kirjoista. Lyhyen oppimäärän teoksissa on pitkän oppimäärän kirjoista poiketen käsitelty aihetta "geometriaa koordinaatistossa". Lyhyen oppimäärän teoksessa "Sigma 2"aihetta on käsitelty erillisenä kahden sivun pituisena tutkimustehtävänä harjoitustehtävineen. Oppikirjassa "Lyhyt matikka 2"aihetta on käsitelty melko runsaasti harjoitustehtävien osana esimerkiksi tehtävien valmiiksi annettuina kuvituksina ja niiden sovellutuksina sekä teoriaesimerkkien osasina. Pitkän oppimäärän oppikirjoissa koordinaatistoa on käytetty oikeastaan vain osana sisältöalueen "tylpän kulman sini ja kosini"havainnollistamista, jossa koordinaatiston käyttö liittyy kuitenkin lähinnä yksikköympyrän käyttöön ja sen havainnollistamiseen.

5.1.3 Muita huomioita sisältöalueista

Taulukon (Liite 1) avulla ei voida nähdä oppikirjoista eroa siinä, onko oppikirjojen harjoitustehtävät liitetty käytännön kontekstiin. Tämän takia tutkimuksessa tehtiin erillinen taulukointi aiheesta. Seuraavalla sivulla esiintyvässä taulukossa (Taulukko 2) kartoitettiin sitä, eroavatko lyhyen ja pitkän oppimäärän kirjat siinä, liittyvätkö kirjojen harjoitustehtävät arkielämän tai käytännön kontekstiin. Taulukointia varten tutkimuksessa olevista oppikirjoista on käyty läpi jokainen tehtävä yksitellen. Tehtävistä on laskettu käytännön kontekstiin liittyvät tehtävät ja verrattu määriä kirjakohtaisiin harjoitustehtävien kokonaismäärään. Esimerkiksi "Lyhyt matikka 2"oppikirjassa 359:stä harjoitustehtävästä 215 harjoitustehtävää liityi käytännön kontekstiin, mikä tarkoittaa 60 % tehtävistä. Tehtäväluokittelut on tehty niin, että ilman kontekstia oleviksi tehtäviksi on luokiteltu esimerkiksi tehtävät, jossa ei ole selvää käytännön kontekstia vaan oppilaan tulee ratkaista esimerkiksi suorakulmaisesta kolmiosta sivun a pituus. Arkielämän tai käytännön kontekstin sisältäviksi tehtäviksi luokiteltiin taas tehtävät, jotka ovat jollain tavalla liitetty tosielämään. Esimerkiksi, jos ympyrää kutsuttaan järveksi tai kartiota jäätelötötteröksi, niin tehtävä on käytännön kontekstissa.

Käytännön kontekstiin liittyvien harjoitustehtävien prosenttiosuudet oppikirjojen välillä olivat vaihtelevia. Lyhyen oppimäärän Sigma 2- kirjassa käytännön kontekstiin liittyviä tehtäviä on 45%, mikä eroaa selvästä Lyhyt matikka 2:sen 60%:sta. Pitkän oppimäärän Pitkä Sigma oppikirjassa käytännön konteksti tehtäviä löytyy 33%:sta, kun taas Pitkä matematiikka 3 kirjasta 47%:sta. Löytyvät erot ovat oppikirjakohtaisia eikä oppimäärien välille voida luoda eroa näiden tulosten pohjalta.

Lisäyksenä äskeisiin pohdintoihin eroista oppimäärien oppikirjojen välillä, voidaan vielä todeta seuraavat asiat. Geometrian historian esitteleminen sisältöalueena on hyvin kirjakohtaista eikä sen esiintymisestä ja painottamisesta voida johtaa johtopäätöksiä pitkän ja lyhyen oppimäärän välille. Myös janan, suoran ja pisteen käsitteiden esille tuonti teoksissa on ennemminkin kirjakohtaista kuin lyhyttä tai pitkää oppimäärää leimaavaa. Edellisiä matemaattisia aihealue-esimerkkejä lukuun ottamatta pitkän ja lyhyen oppimäärän teosten matemaattisissa sisällöissä on hyvin paljon yhtäläisyyksiä. Tulee kuitenkin huomioida, että tarkastelussa ei ole kuitenkaan kiinnitetty huomiota muuhun kuin sisältöalueiden samankaltaisuuteen. Esimerkiksi harjoitustehtävien vaikeutta tai tehtävämäärien painotuksia sisältöalueiden kesken ei ole analysoitu.

		
	Tehtävät, joissa on arkielämän / käytännön konteksti	Tehtävät ilman on arkielämän/ käytännön kontekstia
LYHYT OPPIMÄÄRÄ		
Sigma 2	45 %	55 %
Lyhyt matikka 2	60 %	40 %
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ		
Pitkä sigma 3	33 %	67 %
Pitkä matematiikka 3	47 %	53 %

Taulukko 2: Oppikirjojen harjoitustehtävien luokittelu sen mukaan, liittyykö niihin käytännön kontekstia.

5.2 Oppikirjojen sisältöalueiden yhtäläisyydet

Seuraavissa kappaleissa käsitellään tutkimuksessa laaditun taulukon (Liite 1) esille tuomia yhtäläisyyksiä Geometria-kurssien oppikirjojen sisältöalueiden välillä eli käydään läpi lyhyen ja pitkän oppimäärän oppikirjoissa esiin nousevia yhteisiä sisältöalueita. Sisältöalueista on mainittu ne, jotka ovat esiintyneet sekä pitkän että lyhyen oppimäärän molemmissa tutkittavissa oppikirjoissa. Seuraavassa listassa ei ole otettu kantaa kuin selkeimpiin painotuseroihin oppikirjojen kesken. Välillä sisältöalueet saattoivat siis olla hieman pienemmässä roolissa kyseisessä oppikirjassa esitetyn teorian keskuudessa. Tutkimuksessa ei ole keskitytty esimerkiksi siihen, jos suoran ympyrälieriön vaipan pinta-alaa on käsitelty yhdessä oppikirjoista hieman pienemmässä roolissa, kun pääasiassa asiaa on kuitenkin käsitelty kaikkien oppikirjojen osana. Tutkimuksen kirjoittaja on jättänyt tarkemmat tiedot tutkimuksen lukijalle avoimesti luettavaksi taulukosta (Liite 1). Tutkimuksen kirjoittaja onkin pyrkinyt keskittymään sisältöalueiden esiintyvyyteen pääpiirteittäin ja pyrkinyt luomaan kokonaiskuvaa tutkittavasta asiasta nostamatta pienen pieniä yksityiskohtia liian suureen rooliin.

Seuraavassa luettelossa on esillä kaikki ne sisältöalueet/käsitteet, jotka nousevat esille kaikissa neljässä tutkittavassa oppikirjassa. Toisin sanoen **seuraavat sisältöalueet** ovat **ominaisia lukion geometrian** oppikirjojen **käsitteitä sekä lyhyen että pitkän oppimäärän puolella**.

Oppikirjoille yhteiset sisältöalueet/käsitteet:
(tasogeometria)

- Kulmiin liittyvät käsitteet: vieruskulmalause, ristikulmalause, yhdensuuntaiset suorat, samankohtaiset kulmat ja lause samankohtaisista kulmista.
- Kuvioiden määritelmät, pinta-ala ja tilavuus.
- Kuvioiden erityistapaukset: tasakylkinen kolmio, tasasivuinen kolmio, suunnikas, puolisuunnikas ja säännöllinen monikulmio.
- Kuvioihin liittyvät käsitteet: kolmion kulmien summa, monikulmion kulmien summa sekä ympyrään liittyvät käsitteet: kehän pituus, kaaren pituus, tangentti, tangenttikulma, sektorin sekä segmentin pinta-ala.
- Suorakulmaisen kolmion trigonometria: tangentti, sini ja kosini sekä Pythagoraan lause.
- Kuvioiden yhdenmuotoisuus: vastinkulmat, mittakaava, pinta-alalause, kolmioiden yhdenmuotoisuuslause (kk) ja verranto.

(avaruusgeometria)

- Kappaleiden pinta-ala (vaipan + pohjan/pohjien pinta-ala), tilavuus ja sivujanojen määrittäminen.
- Palloon liittyvät käsitteet: pikkuympyrä, isoympyrä ja maapallon piirit.
- Pythagoraan lause avaruudessa (tämä lyhyen oppikirjoissa vain vähäisessä merkityksessä eli $\sim\sim$).
- Kappaleiden erityistapaukset: suorat kappaleet (esim. suora ympyräkartio) ja säännöllinen pyramidi.

Lyhyen ja pitkän oppimäärän geometrian oppikirjojen sisällöissä/käsitteissä on siis tutkimuksen mukaan paljon yhtäläisyyksiä. Suuri osa edellisessä listassa käsitellyistä käsitteistä on tuttuja jo lukiota edeltävistä matematiikan opinnoista peruskoulun yläluokilta.

5.3 Oppikirjojen sisältöalueet verrattuna OPS:iin

Seuraavissa kappaleissa keskitytään aiemmissa luvuissa esille tulleisiin eroihin ja yhtäläisyyksiin lyhyen ja pitkän oppimäärän välillä koskien OPS:a ja oppikirjoja. Ensin on tarkasteltu sisältöalueita, jotka esiintyvät pitkän oppimäärän sisällöissä lyhyestä oppimäärästä poiketen. Sen jälkeen on keskitytty niiden sisältöalueiden tarkasteluun, jotka esiintyvät lyhyen oppimäärän sisällöissä pitkästä oppimäärästä poiketen.

Alla olevaan taulukkoon (Taulukko 3) taulukoitu ne **pitkän oppimäärän sisältöalueet, jotka selkeästi puuttuvat lyhyen oppimäärän sisällöistä oppikirjojen ja OPS:n mukaan**. Taulukossa on pyritty asettamaan rinnakkain toisiaan vastaavat sisältöalueet. Tämä luokittelu ei ole kuitenkaan yksiselitteistä, sillä osa käsitteistä on määritelty yksityiskohtaisemmin kuin toiset. Jotkut käsitteet, jotka on määritelty hyvin laaja-alaisesti, on vaikea määritellä osoittavan tiettyjä käsitteitä. Taulukointi (Taulukko 3) antaa kuitenkin tiettyä suuntaa OPS:n ja oppikirjojen yhtenevyydestä oppimäärien kesken syntyvien erojen suhteen.

Pitkän oppimäärän sisältöalueet, jotka selkeästi puuttuvat lyhyen oppimäärän sisällöistä	
Oppikirjat	**OPS**
tilavuuslause- kappaleiden yhdenmuotoisuus	kappaleiden yhdenmuotoisuus
kolmion pinta-alan trigonometrinen kaava	vinokulmaisen kolmion trigonometria
minuutti/sekunti/radiaani kulmiin liittyen, suplementti-, komplementti- ja eksplementtikulma, avaruussuorien välinen kulma, suoran ja tason välinen kulma, kahden tason välinen kulma	kuvioiden ja kappaleiden kulmat
sini- ja kosinilause	sini- ja kosinilause
geometristen lauseiden käyttö, todistaminen ja johtaminen	geometristen lauseiden käyttö ja perustelu
kehäkulma ja siihen liittyvät lauseet	ympyrä ja siihen liittyvät suorat
pallokalotin pinta-ala, pallosegmentin tilavuus	

Taulukko 3: Pitkän oppimäärän sisältöalueet, jotka eivät esiinny lyhyen oppimäärän puolella. Jaottelu oppikirjojen ja OPS:n mukaisesti.

Kun tarkastellaan taulukkoa (Taulukko 3), voidaan huomata, että oppikirjat ja OPS noudattavat melko samanlaista linjaa taulukossa tutkittavana asian suhteen. Jotkut käsitteet, kuten sini- ja kosinilause, esiintyvät sanatarkasti sekä OPS:ssa että oppikirjoissa. Toisin sanoen sini-ja kosinilause esiintyy sekä oppikirjojen että OPS:n mukaan pitkän oppimäärän sisältönä muttei lyhyessä oppimäärässä lainkaan. Toisien käsitteiden osalta OPS antaa laajemman aihe-alueen käsitteistä, kuten kuvioiden ja kappaleiden kulmat. Oppikirjoista taas löytyy aihealueeseen liittyviä yksityiskohtaisempia sisältöjä, kuten suplementtikulma ja radiaani. Taulukon perusteella ei voida yksiselitteisesti luoda yleistyksiä OPS:n ja oppikirjojen suhteesta. Voidaan kuitenkin todeta, että pitkän oppimäärän sisältöalueet, jotka puuttuvat lyhyen oppimäärän sisällöistä noudattavat suhteellisen yhtenäistä linjaa OPS:ssa sekä oppikirjoissa. Toisin sanoen sekä OPS:n että oppikirjojen mukaan pitkän oppimäärän sisältöalueet ovat monilta osin lyhyttä oppimäärää moninaisempia ja laajempia.

Pitkästä oppimäärästä löytyy paljon käsitteitä lyhyestä oppimäärästä poiketen. Kuitenkin myös lyhyessä oppimäärässä käsitellään joitakin aihe-alueita pitkästä oppimäärästä poiketen. OPS:n mukaan lyhyessä oppimäärässä korostuvat pitkää enemmän aiheet "geometria koordinaatistossa"ja "käytännön ongelmien ratkaisu geometrialla". Myös Lyhyen oppimäärän oppikirjoissa on pitkän oppimäärän kirjoista poiketen käsitelty aihetta "geometriaa koordinaatistossa". Käytännönläheisyydestä oppikirjojen osalta ei voida tehdä selviä johtopäätöksiä, vaikka käytännön tehtävien osuudet selvitettiin oppikirjoista. Tulokset käytännön tehtävien osalta olivat kuitenkin niin kirjakohtaisia, että tuloksista ei voida tehdä mitään yleisempiä päätelmiä.

Kun verrataan OPS:sta ilmenneitä sisältöalueiden eroja lyhyen ja pitkän oppimäärän kesken oppikirjavertailussa ilmenneisiin eroihin, voidaan huomata, että OPS ja oppikirjat noudattavat melko samanlaista linjaa. OPS:n ja oppikirjojen melko yhtenäinen linja lukion geometria-kurssien matemaattisten aihe-alueiden ja käsitteiden suhteen hyödyttää niin oppilasta kuin opettajaakin. Opettaja voi tukeutua melko luottavaisesti oppikirjojen sisältöihin geometrian kurssin opetuksessaan ja silti toimii linjassa opetussuunnitelman kanssa. Tietenkin opettajan kannattaa tutustua säännöllisin välein myös opetussuunnitelman perusteisiin, jotta hän voi varmistua opetuksensa laadusta. Myös oppilaalle OPS:n ja oppikirjojen yhtenäinen linja takaa itsenäisen opiskelun kirjoista hyväksi tavaksi esimerkiksi kerrata ylioppilaskokeisiin OPS:n tavoitteiden mukaisesti.

Luku 6

Peruskoulun yläluokkien oppikirjojen tarkastelu

Lukion lyhyen ja pitkän oppimäärän tarkastelu geometrian kurssien osalta osoittaa, että oppimäärissä on paljon yhtenäisiä sisältöalueita niin OPS:n ja oppikirjojen mukaan. Kun näitä sisältöalueita verrattiin peruskoulun yläluokkien geometriaa koskevaan opetussuunnitelman perusteiden kohtaan, huomattiin tutkimuksessa viitteitä siitä, että nämä lyhyelle ja pitkälle oppimäärälle ominaiset sisältöalueet voisivat olla yhtenäisiä myös peruskoulun yläluokkia tarkasteltaessa. Kuitenkin tulee edelleen huomioida, että tarkasteluita tehtäessä on huomioitu siis vain sisältöalue tai käsite, esimerkiksi "kolmion kulmien summa", eikä lainkaan esimerkiksi sisältöalueen vaativuutta tai haasteellisuutta.

Tutkimuksen liitteenä olevassa taulukossa (Liite 2) on vertailtu peruskoulun ja lukion oppikirjoissa olevia sisältöalueita keskenään. Taulukossa on liitteen 1 mukaisesti sarakkeina käsitteet sekä niiden matemaattiset aihe-alueet eriteltynä kahteen ensimmäiseen sarakkeeseen. Kolmas ja neljäs sarake koostuvat peruskoulun yläluokkien 7-9 oppikirjasarjojen tarkastelusta. Taulukon sarakkeet viidestä kahdeksaan ovat liitteen 1 mukaiset lukion geometria-kurssien oppikirjojen tarkastelut. Lukion oppikirjatarkastelut on jaettu lyhyen ja pitkän oppimäärän kesken.

Peruskoulun oppikirjojen tarkastelu on suoritettu seuraavalla tavalla. Vaikka peruskoulun yläluokkien OPS on laadittu koskemaan peruskoulun yläluokkia 6-9, tutkimuksessa kuitenkin tarkastellaan vain peruskoulun vuosiluokkia 7-9. Valinta on tehty siksi, että oppikirjasarjat on tehty yhtenäiseksi yleensä koskien vuosiluokkia 1-6 ja 7-9. Lisäksi tässä tutkimuksessa halutaan keskittyä enemminkin peruskoulun ylä-asteen käsittelyyn ja ala-aste jää tutkimuksen rajauksen ulkopuolelle. Peruskoulun yläluokkien oppikirjoiksi on siis valittu kaksi vuosiluokille 7-9 tarkoitettua oppikirjasarjaa. Kirjasarjoissa on kullekin luokka-asteelle tarkoitetussa matematiikan oppikirjassa paljon muutakin kuin geometriaan liittyvää matemaattista oppiainesta. Geometrian aihe-alueisiin kuulumattomat aihe-alueet on kuitenkin sivuutettu ja oppikirjoista on valittu tutkimuksen käsittelyyn vain geometriaa koskevat luvut.

Tutkimuksessa tarkasteltaviksi oppikirjoiksi valittiin seuraavat peruskoulun yläluokkien oppikirjat:

- Laskutaito 7-9, SanomaPro
- Pii 7-9, Otava.

Kaikki tutkimukseen valitut peruskoulun yläluokkien oppikirjat noudattavat tämänhetkistä vuonna 2004 laadittua peruskoulun opetussuunnitelman perusteita. Taulukossa (Liite 2) nämä oppikirjat on taulukoitu omiksi sarakkeikseen oppikirjasarja kohtaisesti niin, että oppikirjasarja "Laskutaito"on sarakkeessa kolme ja "Pii"sarakkeessa neljä. Sarakkeen ruuduissa on käsitelty riveittäin sisältöaluekohtaisesti oppikirjasarjojen käsittelemiä sisältöalueita ja käsitteitä. Kullakin rivillä on käsitteen mukaisesti ruutuun merkitty numero, jos käsite löytyy kyseisestä oppikirjasta. Numerot määräytyvät aina oppikirjan luokka-asteen mukaan. Esimerkiksi, jos sarakkeessa kolme lukee käsitteen "kolmion kulmien summa"mukaisella rivillä numerosarja "7,8,9", tarkoittaa se sitä, että sisältöaluetta on käsitelty kyseisen oppikirjasarjan kaikissa oppikirjoissa vuosiluokilla 7-9. Jos numeron edellä on merkki $\sim$, se tarkoittaa, että asiaa on käsitelty teoriaosan esimerkissä tai muussa sivuroolissa. Jos numeron edessä on taas merkintä $\sim\sim$, tarkoittaa se sitä, että käsite on ollut hyvin vähäisessä sivuroolissa, kuten harjoitustehtävän osana.

Taulukon tarkoituksena on havainnollistaa sitä, mitä sisältöalueita ja käsitteitä peruskoulun yläluokkien oppikirjoissa ei käsitellä. Nämä käsitteet on merkitty tummentamalla kyseiset ruudut. Geometriaan liittyvistä käsitteistä on taulukkoon otettu mukaan vain lukion geometriassa esille nousseet käsitteet. Kun peruskoulun oppikirjoista on löytynyt muita käsitteitä kuin lukion oppikirjoissa korostetut, on ne jätetty taulukoinnissa huomioimatta. Tämä valinta on tehty sen takia, että nämä käsitteet ovat usein taulukossa löytyvien käsitteiden esitietoja ja lisäksi tutkimuksen painopiste on lukion geometrian käsittelyllä.

Kun tutkimuksen lukija katsoo liitteenä olevaa taulukkoa (Liite 2), tulisi hänen kiinnittää erityistä huomiota tummennettuihin ruutuihin. Näistä voidaan nähdä oppikirjojen geometriaan liittyvät eroavaisuudet ja yhtäläisyydet peruskoulun yläluokkien sekä lukion lyhyen ja pitkän oppimäärän kesken. Toisin sanoen tummennetut ruudut kertovat niin tutkijalle kuin tutkimuksen lukijallekin niistä sisältöalueista ja käsitteistä, joita ei käsitellä kyseisissä oppikirjoissa lainkaan. Esimerkiksi käsitteen "sinilause"kohdalla ruudut ovat tummennettuja peruskoulun ja lukion lyhyen oppimäärän sarakkeissa. Tämä kertoo siitä, että sinilausetta käsitellään pitkän oppimäärän geometrian oppikirjassa, mutta ei lukion lyhyen oppimäärän tai peruskoulun oppikirjoissa. Seuraavassa luvussa siirrytäänkin taulukosta saatujen tulosten tarkempaan analysointiin.

6.1 Tulosten tarkastelu

Peruskoulun yläluokkien oppikirjoja tarkastellessa tutkija huomasi kunkin luokka-asteen oppikirjan painottavan hieman erilaisia asioita geometrian osalta. Pii-oppikirjasarjan osalta sisältöalueet painottuivat seuraavalla tavalla. Oppikirjassa Pii 7 käydään läpi kappaleiden ja kuvioiden muotoja sekä niihin liittyviä kulmia, suoria ja pisteitä. Kuvioissa keskitytään myös piirien laskemiseen sekä kuvioiden yhtenevyyteen. Oppikirjassa ei käsitelty vielä esimerkiksi kuvioiden pinta-aloja tai tilavuuksia. Oppikirjassa Pii 8 jatketaan osaksi edellisen vuosiluokkien asioiden kertaamista kuvioiden ja kappaleiden osalta. Asioita viedään kuitenkin astetta pidemmälle. Esimerkiksi yhtenevyyden käsitteestä siirrytään yhdenmuotoisuuteen, kuvioiden tarkastelussa keskitytään pinta-aloihin sekä suorakulmaista kolmiota ryhdytään tarkastelemaan tarkemmin Pythagoraan lauseen avulla. Lisäksi kiinnitetään erityistä huomiota ympyrän ja sen ominaisuuksien käsittelyyn. Oppikirjassa Pii 9 syvennetään edelleen aikaisempien vuosien tietoja, tosin toisiin osa-alueisiin keskitytään huomattavasti painokkaammin. Erityisen tarkkailun alla on suorakulmaisen kolmion trigonometria, johon lisätään tangentin, sinin ja kosinin käsitteet. Lisäksi painotetaan avaruuskappaleiden geometriaa sekä niihin liittyviä pinta-aloja sekä tilavuuksia.

Toisessa oppikirjasarjassa "Laskutaito"oppikirjan 7. vuosiluokan geometrian sisältöalueet ovat hyvin samankaltaisia kuin oppikirjassa "Pii 7". Geometriaa koskevissa oppikirjan kappaleissa käsitellään siis lukion sisältöalueista vahvimmin tasokuvioiden ja niihin liittyvien kulmien geometrisia ominaisuuksia. Kahdeksannen luokan oppikirjassa "Laskutaito 8"keskitytään "Pii 8"tapaan yhdenmuotoisuuteen sekä kolmion ja ympyrän geometriaan. Myös 9. luokan oppikirjat noudattavat keskenään hyvin samankaltaista rakennetta. "Laskutaito 9"syventää edellisten vuosiluokkien geometrisia käsitteitä. Esimerkiksi suorakulmaisen kolmion trigonometriassa tulevat mukaan käsitteet sini, kosini sekä tangetti ja tasokuvioista siirrytään voimakkaasti avaruuskappaleiden käsittelyyn niiden pinta-alojen ja tilavuuksien kautta.

Tässä tutkimuksessa ei pyritä selvittämään tarkkoja eroja peruskoulun oppikirjasarjojen välillä vaan kiinnostuksen kohde on peruskoulun ja lukion geometrian sisältöalueiden erojen ja yhtäläisyyksien löytämisessä. Näiden erojen ja yhtäläisyyksien havaitsemiseen on käytetty taulukkoa (Liite 2), johon oppikirjojen sisältöalueet on luokiteltu. Tutkija on taulukkoa tarkastellessaan kiinnittänyt erityistä huomiota sisältöalueiden kohtiin, jotka esiintyvät joko kaikissa oppikirjoissa tai selkeästi vain jonkun oppimäärän kohdalla (peruskoulu/lukion lyhyt oppimäärä/lukion pitkä oppimäärä). Tutkimuksessa keskitytään ensin ilmenneisiin eroihin ja sitten siirrytään yhtäläisyyksien käsittelyyn.

Seuraavassa luettelossa on luetteloitu ne **sisältöalueet, jotka esiintyvät lukion pitkän oppimäärän** geometrian sisältöalueina **oppikirjoissa, mutta eivät lukion lyhyen oppimäärän tai peruskoulun yläluokkien oppikirjoissa**.

- minuutti/sekunti/radiaani kulmiin liittyen

- suplementti-, komplementti- ja eksplementtikulma
- kolmion pinta-alan trigonometrinen kaava
- sini- ja kosinilause
- avaruussuorien välinen kulma, suoran ja tason välinen kulma, kahden tason välinen kulma
- pallokalotin pinta-ala, pallosegmentin tilavuus
- kolmioihin ja trigonometriaan liittyviä lauseita, jotka esiintyivät pitkän oppimäärän syventävissä/extra- osioissa

Äskeisen käsitteet ovat siis oppikirjavertailun perusteella ominaisia vain lukion pitkälle oppimäärälle. Oppikirjavertailussa tuli kuitenkin tutkijan mielestä yllättävästi esille myös käsitteitä, jotka esiintyvät sekä lukion pitkän oppimäärän että perukoulun yläluokkien oppikirjoissa, mutta eivät lainkaan lukion lyhyen oppimäärän kohdalla. Seuraavassa luettelossa onkin luetteloitu ne geometrian **sisältöalueet, jotka esiintyvät lukion pitkän oppimäärän ja peruskoulun yläluokkien oppikirjoissa lukion lyhyestä oppimäärästä poiketen**.

- Pythagoraan lauseen käänteislause
- Kehäkulma ja siihen liittyvät lauseet

Edellisten huomioiden lisäksi voidaan vielä mainita, että peruskoulun oppikirjoissa ei ole käsitelty lukion oppimäärästä poiketen lainkaan monikulmion kulmien summan käsitettä ja yhdenmuotoisuuteen osalta peruskoulun oppikirjoissa ei käsitelty pinta-ala ja tilavuuslauseita käytännössä lainkaan. Peruskoulun ja lukion oppikirjojen sisältöalueissa geometrian osalta voitiin löytää siis jonkin verran eroavaisuuksia. Toisaalta paljon yhteläisyyksiäkin löytyi. Yhtäläisyyksiä tarkastellessa tulee taas kiinnittää huomiota siihen, että tutkimuksessa ei ole huomioitu lainkaan sisältöalueiden oppikirjakohtaista haastavuutta tai syvällisyyttä. Tutkimuksessa on keskitytty siis ainoastaan sisältöalueiden luokitteluun yksittäisten käsitteiden, lauseiden tai määritelmien esiintyvyyteen mukaan.

Seuraavasta luettelosta löytyvät ne **sisältöalueet, jotka esiintyvät kaikkien käsiteltyjen oppimäärien kohdalla** eli peruskoulun yläluokkien, lukion lyhyen ja pitkän oppimäärän oppikirjoissa.

- Kulmiin liittyvät käsitteet: vieruskulmalause, ristikulmalause, yhdensuuntaiset suorat ja samankohtaiset kulmat.

- Kuvioiden määritelmät, pinta-alat ja tilavuudet.
- Kuvioiden erityistapaukset: tasakylkinen kolmio, tasasivuinen kolmio, suunnikas, puolisuunnikas ja säännöllinen monikulmio.
- Kuvioihin liittyvät käsitteet: kolmion kulmien summa, monikulmion kulmien summa sekä ympyrään liittyvät käsitteet: kehän pituus, kaaren pituus, tangentti, tangenttikulma, sektorin sekä segmentin pinta-ala.
- Suorakulmaisen kolmion trigonometria: tangentti, sini ja kosini sekä Pythagoraan lause.
- Kuvioiden yhdenmuotoisuus: vastinkulmat, mittakaava, kolmioiden yhdenmuotoisuuslause (kk) ja verranto.
- Kappaleiden pinta-ala (vaipan + pohjan/pohjien pinta-ala), tilavuus ja sivujanojen määrittäminen.
- Palloon liittyvät käsitteet: pikkuympyrä, isoympyrä ja maapallon piirit.
- Pythagoraan lause avaruudessa (peruskoulun/lukion lyhyen oppimäärän oppikirjoissa vain harjoitustehtävissä)
- Kappaleiden erityistapaukset: suorat kappaleet (esim. suora ympyräkartio) ja säännöllinen pyramidi.

Luettelosta voidaan huomata, että lukio-opetuksen geometriakurssien keskeisille sisältöalueille luodaan pohja jo perusopetuksen yläluokilla eli suuri osa lukion keskeisistä geometrian sisältöalueista on painotettuja geometrian oppimisalueita jo peruskoulun yläluokilla.

Luku 7

Lukion ylioppilaskirjoitukset geometrian osalta

Lukion matematiikan ylioppilaskirjoituksissa järjestetään vaativuudeltaan kahden eri tason kokeet. Matematiikassa tasoja kutsutaan pitkäksi ja lyhyeksi oppimääräksi. Opiskelija saa opinnoistaan riippumatta valita, minkä tason mukaiseen matematiikan kokeeseen hän osallistuu. [22] Tällöin lyhyttä oppimäärään matematiikassa opiskellut opiskelija voi suorittaa ylioppilaskirjoituksissa pitkän oppimäärän kokeen ja vastaavasti myös pitkää oppimäärää opiskellut voi suorittaa lyhyen oppimäärän kokeen. Ylioppilaskirjoituksissa matematiikan kokeessa on kussakin viisitoista tehtävää, joista oppilas suorittaa kymmenen tehtävää. Kokeessa apuvälineinä saa käyttää ylioppilaslautakunnan hyväksymiä taulukkokirjoja ja laskimia. [21] [22]

Kustakin tehtävästä oppilas saa pisteitä asteikolla 0-6. Poikkeuksena Ylioppilaslautakunta muutti pitkän oppimäärän kokeen rakennetta kevään 2007 tutkinnosta alkaen. Uudistetussa kokeessa on valittavana edelleen 15 tehtävää, mutta tehtävistä kaksi on muita vaativimpia ja niiden ratkaiseminen edellyttää oppilaalta syvällisempää ja laajempaa käsittelyä. Tehtävät perustuvat kuitenkin edelleen pitkän oppimäärän pakollisiin ja valtakunnallisiin syventäviin kursseihin. Nämä vaativammat tehtävät arvostellaan muista tehtävistä poiketen asteikolla 0-9. Tehtävä uudistuksesta huolimatta oppilas saa edelleen vastata enintään kymmeneen tehtävään. Lyhyen oppimäärän koe pysyi uudistuksenkin jälkeen ennallaan. [21] [22] Tässä tutkimuksessa (Liite 1) uudistuksen mukaisia vaativampia tehtäviä merkitään * merkillä.

Ennen geometrian kursseihin liittyvien ylioppilaskokeiden tehtävien luokittelua sisältöalueiden mukaisesti, selvitettiin tutkimuksessa tarkoin se, mitkä ylioppilaskokeiden tehtävistä ovat geometria-kurssia koskevia tehtäviä. Seuraavissa alaluvuissa on kuvattu sitä prosessia, miten geometriaa koskevat tehtävät on valittu ylioppilaskokeiden kaikkien tehtävien joukosta. Valintaperusteiden jälkeen siirrytään geometriaa koskevien tehtävien luokitteluun niiden sisältöalueiden mukaisesti.

7.1 Lyhyt oppimäärä - geometristen tehtävien erottaminen muista ylioppilaskirjoitusten tehtävistä

Geometrian kurssia koskevien tehtävien valinta lyhyen oppimäärän ylioppilaskokeen kaikista tehtävistä suoritettiin seuraavalla tavalla. Lyhyen oppimäärän ylioppilaskokeiden tehtävät käytiin läpi kahteen kertaan. Molemmilla tarkastelukerroilla tutkija tarkasteli tehtäviä yksi kerrallaan ja taulukoi ylös tehtävät, joissa geometriaa esiintyi. Tehtävien tarkastelussa on kiinnitetty huomiota myös siihen, tarvitaanko tehtävän ratkaisuun myös muita kuin geometria-kurssin taitoja. Osa ylioppilaskokeen tehtävistä vaikutti aluksi geometrian tehtäviltä, mutta osoittautuikin tarkemman tarkastelun jälkeen muiden pakollisten tai syventävien kurssien sisältöalueita vastaavaksi. Kun ylioppilaskokeiden kaikki tehtävät oli tarkasteltu kahteen kertaan, tutkija vertasi tehtävistä kirjoittamia merkintöjä keskenään.

Ylioppilaskirjoitustehtävien tarkastelu kahteen kertaa osoittautui hyväksi ratkaisuksi, sillä kävi ilmi, että huolellisesta tutkimustyöstä huolimatta tutkijalla oli erilaisia merkintöjä samasta ylioppilaskokeen tehtävästä eri tarkastelukertojen kesken. Esimerkiksi ensimmäisen tutkimuskerran aikana tutkija oli ajatellut tietyn tehtävän olevan täysin geometrian tehtävä ja toisella kerralla se oli merkitty syventävän kurssin tehtäväksi. Tutkija tekikin yhteenvedon tehtävien tarkastelukerroista ja käsitteli muistiinpanoilta ristiriitaiset tehtävät uudelleen. Tämän jälkeen syntyi lopullinen tehtäväkohtainen lista geometrian tehtävistä, jotka esiintyivät lyhyen oppimäärän ylioppilaskirjoituksissa.

Kuten aiemmin mainittiin, ylioppilaskokeissa oli muutamia tehtäviä, jotka vaikuttivat ensin geometrian tehtäviltä, mutta osoittautuivatkin myöhemmin muiden kurssien sisältöalueita vastaaviksi. Tälläisia tehtäviä olivat lukion lyhyen oppimäärän ylioppilaskokeissa seuraavanlaiset tehtävät.

- Lyhyen oppimäärän pakolliseen kurssiin **MAB4**: Matemaattisia malleja I, liittyy usein geometriaan viittaavat tehtävät, jotka sijoittuvat osa-alueeseen "geometriaa koordinaatistossa". Tällaisissa tehtävissä tulee käyttää esimerkiksi seuraavia käsitteitä tehtävän ratkaisemiseen: suoran kulmakerroin, yhtälön määritelmä ja suorien leikkauspiste. Geometrian käsitteisiin tehtävissä viittaa esimerkiksi kolmion alan laskeminen. Tällainen ylioppilaskokeen tehtävä on esimerkiksi S10/3.

- Kurssin **MAB4**: Matemaattisia malleja I keskeinen sisältö liittyy polynomifunktion derivaattaan. Tehtävä saattaa ensin vaikuttaa geometrian tehtävältä, koska siinä tulee määrittää esimerkiksi kolmion pinta-ala. Tehtävän ratkaisussa on kuitenkin geometrian peruskäsitteitä oleellisempana tietona seuraavat käsitteet: paraabeli, tangentti, leikkauspiste, kulmakerroin ja derivointi. Ylioppilaskokeessa tälläinen tehtävä on esimerkiksi S11/11.

- Ylioppilaskirjoituksista löytyi sellaisia geometrian käsitteisiin liittyviä tehtäviä, jotka perustuvatkin tarkemman tarkastelun jälkeen pääasiassa yhtälönratkaisutehtäviksi. Näissä tehtävissä tehtävän ratkaisuun vaaditaan yhtälönratkaisusta muun muassa seuraavia taitoja: yhtälöparin, kulmakertoimen ja leikkauspisteen käsitteet. Edellä kuvaillut yhtälönratkaisutehtävät liittyvät lyhyen oppimäärän pakollisen kurssiin **MAB6**: Matemaattisia malleja II. Kurssin yhtenä tavoitteena on täydentää ja varmentaa yhtälöiden ratkaisutaitoja. Vaativampaan yhtälönratkaisuun liittyy esimerkiksi ylioppilaskoetehtävä K11/12.

- Lyhyen oppimäärän kurssiin **MAB6**: Matemaattisia malleja II liittyy myös geometriseen summaan liittyvät ylioppilaskoetehtävät. Kyseisen kurssin yhtenä tavoitteena onkin ongelmien ratkaisu geometriseen jonon sekä summan avulla. Geometrista summaa koskeva ylioppilaskoetehtävä on esimerkiksi K12/9.

- Vektorilaskennan tehtävät liittyvät lyhyen oppimäärän syventävään kurssiin **MAB8**: Matemaattisia malleja III. Kurssin yksi keskeisistä sisällöistä on vektorin käsite, vektoreiden peruslaskutoimitukset sekä koordinaatiston vektoreiden komponenttiesitys ja skalaaritulo.

- Lyhyen oppimäärän valinnaisella kurssilla **MAB8**: Matemaattisia malleja III käsitellään vektorilaskennan lisäksi myös tarkemmin trigonomisia funktiota. Kurssin keskeisiin sisältöihin kuuluu muun muassa trigonomisten funktioiden määrittely yksikköympyrän avulla. Trigonomisten funktioiden haastavampaa käsittelyä koskee ylioppilaskokeen tehtävistä esimerkiksi tehtävä S11/15.

Kaiken kaikkiaan lyhyen oppimäärän geometriaa vahvasti muistuttavien/sivuavien tehtävien geometriaa koskeva sisältö käsittelee lähes poikkeuksetta kolmion pinta-alan määrittämistä ja loppu tehtävästä on puhtaasti muiden kurssien sisältöalueita.

7.2 Pitkä oppimäärä - geometristen tehtävien erottaminen ylioppilaskirjoitusten tehtävistä

Pitkän oppimäärän ylioppilaskokeen tehtävien tarkastelu toteutettiin samoin metodein kuin lyhyen oppimääränkin. Myös pitkän oppimäärän tehtävissä oli tehtäviä, jotka vaikuttivat ensin geometrian tehtäviltä, mutta osoittautuivatkin myöhemmin muiden kurssien sisältöalueita vastaaviksi. Tälläisia tehtäviä olivat lukion pitkän oppimäärän ylioppilaskokeissa seuraavanlaiset tehtävät.

- Analyyttisen geometrian tehtävät liittyvät pitkän oppimäärän pakolliseen kurssiin **MAA4**: Analyyttinen geometria. Analyyttisen geometrian tavoitteena on luoda yhteyksiä algebraalisten ja geometristen käsitteiden välille. Kurssilla tutkitaan yhtäläisen avulla pisteitä, ympyröitä, suoria ja paraabeleja. Geometria-kurssi on Analyyttista geometriaa - kurssin esitietovaatimuksena ja Geometria-kurssin käsitteitä käytetään useissa analyyttisen geometrian tehtävissä. Tehtävissä ovat esillä esimerkiksi ympyrän, kuvioiden pinta-alojen sekä kolmion ominaisuuksien käsitteet. Analyyttisen geometrian tehtävä ylioppilaskokeessa on esimerkiksi K12/3.

- Vektorilaskentaan liittyvät tehtävät liittyvät pitkän oppimäärän pakolliseen kurssiin **MAA5**: Vektorit. Vektorilaskenta- kurssin keskeisiä sisältöjä ovat muun muassa vektoreilla laskeminen, skalaaritulo ja vektoreihin liittyvät kulmat. Vektorilaskennan tehtävät voi toisinaan ratkaista myös pelkään "puhtaaseen"geometriaan perustuen, mutta tällöin ratkaisu ei ole usein niin yksinkertainen kuin vektorilaskennan avulla. Nämä ratkaisutavat on kuitenkin ajateltu toissijaisiksi eikä niitä ole huomioitu. Toisinaan vektorilaskennan tehtäviin ei voida löytää geometrista ratkaisutapaa. Vektorilaskennan tehtävissä on geometriaan viitaten selvitettävä esimerkiksi seuraavia käsitteitä: kulman suuruus ja suorien yhdensuuntaisuus. Vektorilaskennan ylioppilaskokeen tehtäviä ovat esimerkiksi ylioppilaskokeen tehtävät S11/5, S10/3a, K10/5, K11/8 ja S12/9.

- Derivointi-tehtävät liittyvät pitkän oppimäärän pakollisen kurssiin **MAA7**: Derivaatta. Kurssin keskeisinä sisältöinä on raja-arvon, jatkuvuuden ja derivaatan käsitteet sekä polynomifunktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen. Geometriaan liittyvissä tehtävissä tulee määrittää suorakulmion tai kolmion pienintä tai suurinta mahdollista alaa. Pinta-alan laskeminen liittyy geometrian sisältöihin, mutta muuten tehtävän ratkaisemiseen tarvitaan olennaisesti seuraavia käsitteitä: derivointi, funktion nollakohdat ja kulkukaavion muodostaminen. Geometriaan viittaavia derivointikurssin tehtäviä ovat muun muassa ylioppilaskokeen tehtävät K10/7 ja S10/10.

- Geometriseen jonoon ja summaan viittaavat tehtävät liittyvät pitkän oppimäärän pakollisen kurssiin **MAA9**: Trigonometriset funktiot ja lukujonot. Kurssin yhtenä tavoitteena on geometriseen jonon ja summan oppiminen. Geometrisista käsitteistä tehtäviin liittyvät esimerkiksi ympyrän ja kolmion pinta-alojen laskeminen. Geometrisen summan laskemiseen liittyy esimerkiksi ylioppilaskoetehtävä K12/11.

- Integraalilaskennan tehtävät liittyvät pitkän oppimäärän kurssiin **MAA10**: Integraalilaskenta. Integraalilaskennan avulla voidaan määrittää myös tietynlaisia pinta-aloja ja tilavuuksia. Tästä esimerkkinä "tunnelin"poikkileikkauksen pinta-ala, joka kuvautuu koordinaatistossa paraabelin ja x-akselin väliseksi alaksi. Geometriaan viittaavasta integraalilaskennan tehtävästä on esimerkkinä ylioppilastehtävä K10/8.

Kaiken kaikkiaan pitkän oppimäärän geometriaa vahvasti muistuttavien/sivuavien tehtävien geometriaa koskeva sisältö liittyi yleensä kuvioiden pinta-aloihin, kulmien määrittämiseen sekä kuvioiden ominaisuuksien tuntemiseen ja loput tehtävästä koskivat puhtaasti muiden kurssien sisältöalueita. Tutkimuksen luotettavuuden kannalta tulee kuitenkin huomioida, että tehtävien luokittelu on tehty tutkijan näkökulmasta ja toisen tutkijan näkökulma tehtävien jaottelusta voisi olla toisenlainen. Tutkija on kuitenkin pyrkinyt perustelemaan valintansa mahdollisimman tarkasti ja yksityiskohtaisesti. Esimerkiksi on muutamia tehtäviä, jotka tutkija on luokitellut geometrian tehtäviksi, vaikka niiden ratkaisemiseen tarvitaan oleellisesti myös muiden kurssien taitoja. Nämä tehtävät toinen tutkija olisi voinut yhtälailla määritellä myös toisien kurssien tehtäviksi muiden kurssien käsitteiden perusteella. Tässä tutkimuksessa nuo tehtävät on kuitenkin merkitty geometrian tehtäviksi potenssissa olevan tarkennuksen nojalla. Tehtävänumeron potenssiksi merkitty tarkennenumero kertoo tarkennuksen muista tehtävän ratkaisuun liittyvistä taidoista. Lisäksi tulee huomioida, että geometrian tehtävissä on hallittava kattavasti yhtälönratkaisun perustaitoja ja näitä taitoja ei ole erikseen mainittu.

7.3 Ylioppilaskirjoitusten geometrian tehtävät

Tutkimuksessa on taulukoitu vuosien 2010-2012 ylioppilaskirjoitusten geometrian tehtävät niissä esiintyvien sisältöalueiden mukaisesti liitteenä olevaan taulukkoon (Liite 1). Ylioppilaskirjoitusten merkinnät löytyvät sarakkeista viisi ja kuusi. Toinen sarakkeista edustaa lyhyen oppimäärän ylioppilaskokeen geometrian tehtäviä ja toinen sarakkeista puolestaan pitkän oppimäärän tehtäviä. Kyseisen ylioppilaskokeen tehtävä on merkitty numero-kirjainkoodilla aina siihen sille riville, mitä sisältöaluetta tehtävä koskee.

Numero-kirjainkoodiyhdistelmä koostuu seuraavista osista. Ensimmäinen kirjain kertoo kokeen ajoittumisesta vuoden sisällä. "k"tarkoittaa kevättä ja "s"syksyä. Kirjaimen perässä on kaksi numeroa, jotka kertovat ylioppilaskokeen järjestämisvuodesta. Esimerkiksi keväällä vuonna 2012 järjestetty ylioppilaskoe on merkitty koodilla "k12". Tämän jälkeen koodi katkeaa kauttaviivalla ja sen jälkeiset kirjaimet ja numerot kertovat tehtävästä. Ylioppilaskokeen tehtävät on kussakin kokeessa järjestetty numeroin ja tässä koodissa käytetään kyseisiä ylioppilaskokeen virallisia tehtävänumerointeja. Jos koodissa on kirjain numeron jälkeen, on kysymys tehtävän tietystä alatehtävästä. Esimerkiksi merkintä "3a"tarkoittaa tehtävän 3 alakohtaa a. Koodin kokonaisesimerkkinä kirjain-numerokoodi "s11/2a"tarkoittaa vuoden 2011 syksyn ylioppilaskokeen tehtävää 3, josta käsitellään vain alakohtaa a. Se onko kyseinen tehtävä lyhyen vai pitkän oppimäärän tehtävä, selviää aina sarakkeen mukaan.

Taulukoinnissa on mukana ylioppilaskokeiden geometrian tehtävät kuudesta lyhyen oppimäärän ja kuudesta pitkän oppimäärän ylioppilaskokeesta. Yksi tehtävä voi esiintyä monessakin ruudussa, sillä geometrian tehtävissä käsitellään usein useampia sisältöalueita. Jos sisältöalue-rivillä on mainittu enemmän kuin yksi käsite, on kyseisen tehtävän koodi merkitty sitä vastaavaan ruutuun, jos tehtävä on käsitellyt ainakin yhtä sisältöalueista. Osa ylioppilaskokeiden sarakkeen ruuduista on tyhjiä ja se tarkoittaa sitä, että mikään tutkittavista tehtävistä ei koskenut kyseisen rivin sisältöaluetta. Taulukointiin valituista ylioppilastehtävistä osa oli täysin geometrian tehtäviä ja osa tehtävistä oli geometrian osatehtäviä (esimerkiksi a-kohta). Osa tehtävistä oli sellaisia, että niiden ratkaisuun tarvitsee muitakin kuin geometria-kurssin taitoja. Nämä taidot on merkitty tehtävänumeron potenssina olevana numerona. Potenssinumeroiden merkitykset ovat seuraavat: 1=prosenttilasku, 2= tiheyden käsite ja 3=nopeuden käsite. Esimerkiksi merkintä lyhyen oppimäärän tehtävänumerointi "10^1"syksyn 2012 kohdalla tarkoittaa syksyn 2012 ylioppilaskirjoitusten tehtävää 10. Tässä tehtävässä tehtävän ratkaisemiseen tarvitaan geometriakurssin taitojen lisäksi prosenttilaskun taitoja. Yläviitteisiin on merkitty vain selkeästi geometriataidoista poikkeavat taidot. Esimerkiksi normaaleja geometriantehtävässä tarvittavia yhtälönratkaisun taitoja ei ole merkitty erikseen.

Tutkittavista ylioppilaskokeista löytyi yhteensä lyhyen oppimäärän osalta 17 geometrian tehtävää ja pitkän oppimäärän kokeista 13 geometrian tehtävää. Seuraavissa luetteloissa on lajiteltu tutkittavista ylioppilaskokeista tehtävät, joiden ratkaisu perustuu geometria-kurssien taitoihin. Luetteloissa esitetään ensin lukion lyhyen oppimäärän ylioppilaskokeen tehtävät ja sitten pitkän ylioppilaskokeen tehtävät.

Lukion lyhyen oppimäärän ylioppilaskokeen geometriaan liittyvät tehtävät:

- s12: 2b, 9, 10^1
- k12: 6
- s11: 2a, 3, 7, $8^{1,2}$
- k11: 2a, 4^1, 6
- s10: 2ab, 4, 10^1
- k10: 2a, 7, 10

Lukion pitkän oppimäärän ylioppilaskokeen geometriaan liittyvät tehtävät:

- s12: 4b, 15^*a

- k12: 9, 15^*
- s11: 1b, 15^*
- k11: 7
- s10: 5^3, 9^2, 15^*
- k10: 3a, 4^1, 10

Lyhyen oppimäärän ylioppilaskokeista löytyi yhdestä neljään geometriaa koskevaa tehtävää koetta kohden. Tosin osa näistä tehtävistä oli vain tehtävien osa-tehtäviä, esimerkiksi kolmasosa koko tehtävästä. Lukion pitkän oppimäärän tutkituissa ylioppilaskokeessa löytyi geometrian tehtäviä yhdestä kolmeen kappaletta koetta kohden. Kuten lyhyen oppimääränkin kohdalla, osa tehtävistä oli kuitenkin osa-tehtäviä, eli esimerkiksi kolmasosa tehtävästä. Pitkän oppimäärän geometrian tehtävistä moni on ylioppilaskokeen jokeritehtäviä (merkitään * merkillä). Näistä tehtävistä on mahdollisuus saada 9 pistettä normaalin 6 tehtäväkohtaisen pistemäärän sijasta. Kummankin oppimäärän osalta tulee huomioida, että luetteloissa on aina mainittu varsinaiset geometrian tehtävät, mutta myös monissa muissa tehtävissä tarvitaan yksittäisiä geometrian taitoja, kuten kolmion pinta-alan laskemista. Näitä tehtäviä ei ole luetteloissa kuitenkaan mainittu, sillä kyseisten tehtävien ratkaisu perustuu kuitenkin pääasiassa muiden kurssien taitoihin.

7.4 Ylioppilaskokeen geometrian tehtävävien sisältöalueet - lyhyt oppimäärä

Kun tarkastellaan taulukkoa (Liite 1), johon on luokiteltu lyhyen oppimäärän ylioppilaskokeen geometrian tehtävät, voidaan huomata, että lyhyen oppimäärän geometriaa koskevissa ylioppilaskokeen tehtävissä kartoitetaan oppilaan geometriaan liittyvien taitojen osaamista hyvin monipuolisesti. Yhden geometrian tehtävän sisällä voidaan tarvita ratkaisun saamiseksi monen eri geometrisen sisältöalueen hallintaa. Seuraavassa luettelossa on kerrattu **OPS**: n antamat **keskeiset sisällöt** lyhyen oppimäärän geometrian kurssille. Kunkin keskeisen sisällön jälkeen on **suluissa geometrian tehtävien lukumäärä, jotka** tutkittavissa kokeissa **koskevat kyseistä sisältöaluetta**.

- kuvioiden yhdenmuotoisuus (4 tehtävää)
- suorakulmaisen kolmion trigonometria (6 tehtävää)
- Pythagoraan lause (6 tehtävää)

- kuvioiden ja kappaleiden pinta-alan ja tilavuuden määrittäminen (11 tehtävää)
- geometrian menetelmien käyttö koordinaatistossa (-)

Edellämainitut sisältöalueet ovat siis hyvin olennaisia lyhyen oppimäärän ylioppilaskokeiden geometrian kokeessa. Ainoastaan geometristen menetelmien käyttö koordinaatistossa-aihealue ei esiintynyt geometrian tehtävissä. Kuitenkin tarkennukseksi täytyy todeta, että moni tehtävistä, joita ei luokiteltu varsinaisiksi geometrian tehtäviksi, vaan muiden kurssien sisällöiksi, sijoittuivat usein koordinaatistoon. Näissä tehtävissä tuli esimerkiksi ratkaista koordinaatistossa sijaitsevan kolmion pinta-ala. Lisäksi jotkut ylioppilaskoetehtävien geometrian sisältöalueet eivät soveltuneet edellä lueteltujen OPS:n antamien keskeisten sisältöalueiden aihepiireihin, vaikka niihin liittyi tehtäviä ylioppilaskirjoituksissa. Näitä muita ylioppilaskirjoituksissa esiintyneitä sisältöalueita ovat kulmiin liittyvät vieruskulmalause, kolmion kulmien summa ja monikulmion kulmien summa sekä kuvioiden ominaisuuksiin liittyvät ominaisuudet tasasivuinen kolmio, säännöllinen monikulmio, ympyrän osat ja kehän pituus. Näitä käsitteitä esiintyi neljässä tutkittavista tehtävistä. Pääpaino ylioppilaskirjoitustehtävien sisältöalueissa oli selkeästi OPS:n keskeisten sisältöjen mukainen. Lisäksi, jos ylioppilaskirjoitustehtävien sisältöalueita verrataan oppikirjojen sisältöalueisiin, huomataan, että kaikki tehtävissä esiintyvät sisältöalueet kuuluvat lyhyen oppimäärän oppikirjojen sisältöalueisiin. Toisin sanoen lyhyen oppimäärän kokeissa ei esimerkiksi esiinny tehtäviä, joiden sisältöalueet löytyisivät vain pitkän oppimäärän oppikirjoista.

Tutkimuksen otos ylioppilaskokeista on suhteellisen pieni ja siitä saatavia tuloksia tuleekin katsoa kriittisin ottein. Taulukosta voidaan kuitenkin nähdä, että geometrian ylioppilastehtävät jakaantuvat käsittelemään hyvin laajasti geometrian sisältöalueita. Lyhyen oppimäärän kannalta korostuvat tehtävissä juuri OPS:ssa mainitut kurssin MAB2 keskeiset sisällöt; suorakulmaisen kolmion trigonometria, kuvioiden yhdenmuotoisuus, Pythagoraan lause ja kuvioiden ja kappaleiden pinta-alan ja tilavuuden määrittäminen. Keskeisistä sisällöistä vähemmälle huomiolle tehtävissä jää geometrian menetelmien käyttö koordinaatistossa. Tutkijan mielestä lyhyen oppimäärän ylioppilaskokeissa testataan sisältöalueiden kannalta hyvin tasapuolisesti sekä OPS:ssa että oppikirjoissa esiin nousseita keskeisiä sisältöalueita. Tämä on sekä opettajan että oppilaiden kannalta hyvä asia. Näin esimerkiksi oppilaat tietävät, että heidän tulee opiskella OPS:n mukaiset keskeiset sisällöt pärjätäkseen ylioppilaskirjoituksissa geometrian osuuksissa ja opettajat tietävät, mihin heidän tulee opetuksessaan keskittyä.

On lisäksi huomioitava, että geometrian osuus matematiikan lyhyen oppimäärän ylioppilaskirjoituksissa on tärkeä. Tutkimuksen mukaan geometrian tehtäviä esiintyi kussakin tutkittavassa kokeessa yhdestä neljään kappaletta koetta kohti. Hyvällä geometrian osaamisella voi siis vaikuttaa voimakkaasti matematiikan lyhyen oppimäärän ylioppilaskokeen arvosanaan. Asiaa on Pro Gradu -tutkielmassaan käsitellyt myös Paavo Juutilainen

(2008). Juutilainen on kirjoittanut Pro Gradu -tutkielmansa aiheesta "Lyhyen matematiikan ylioppilaskirjoituksista". Tutkielmassaan Juutilainen korostaa sitä, että hänen tutkimissaan matematiikan lyhyen oppimäärän ylioppilaskirjoituksissa hyödyllisemmäksi taidoksi nousi yhtälönratkaisu. Tämän jälkeen koemenestyksen kannalta merkittävimmäksi taidoksi nousi geometrian osaaminen. Geometriset tehtävät liittyivät usein yhtälönratkaisutehtäviin. Usein tehtävänannoissa kuvattiin sanallisesti jonkinlaisen tilanteen geometriaa, jonka perusteella tehtävässä oli muodostettava ratkaistava yhtälö. Juutilaisen mielestä geometrian ja yhtälönratkaisun yhdistäminen on hyvin luonnollista, sillä silloin tehtävistä voidaan rakentaa monimuotoisia ja geometrian osaamista hyvin mittaavia tehtäviä. Juutilainen mainitsee kolmanneksi tärkeimmäksi taidoksi prosenttilaskun ja huomauttaa, että näiden kolmen osa-alueen hallinnalla voi ratkaista jo suuren osan matematiikan lyhyen oppimäärän ylioppilaskokeen tehtävistä. [9]

7.5 Ylioppilaskokeen geometrian tehtävien sisältöalueet - pitkä oppimäärä

Kun tarkastellaan taulukkoa (Liite 1), johon on luokiteltu pitkän oppimäärän ylioppilaskokeen geometrian tehtävät, voidaan huomata, että tehtävät sisältävät monia geometrian sisältöalueita. Seuraavassa luettelossa on kerrattu **OPS:n mukaiset** geometria-kurssin **MAA3 keskeiset sisällöt** ja kunkin sisällön jälkeen on **merkitty sulkuihin** tutkimuksessa löydettyjen ylioppilaskokeiden **tehtävien lukumäärä, joissa kyseinen sisältöalue esiintyy**. Huomioi, että yksi tehtävä voi esiintyä useiden sisältöalueiden kohdalla.

- kuvioiden ja kappaleiden yhdenmuotoisuus (3 tehtävää)
- sini- ja kosinilause (2 tehtävää)
- ympyrän ja siihen liittyvien osien geometria (3 tehtävää)
- kuvioihin ja kappaleisiin liittyvien pituuksien (7 tehtävää), kulmien (6 tehtävää), pinta-alojen (7 tehtävää) ja tilavuuksien (1 tehtävä) laskeminen

Kuvioihin ja kappaleisiin liittyvä kohta "pituuksien laskeminen"tarkoittaa tässä tapauksessa lähinnä Pythagoraan lauseen käyttöä, joka esiintyi yhteensä 7 tehtävässä. Muuten lähes poikkeuksetta geometrisissa tehtävissä tulee laskea erilaisia pituuksia, kuten ympyrän halkaisijaa tai kuvion piiriä. Lyhyen oppimäärän tapaan Pythagoraan lauseen merkitys tärkeän osattavan käsitteenä korostui. Samoin suorakulmaisen kolmion trigonometriaan liittyvät sinin, kosinin ja tangentin käyttö, joka esiintyi neljässä tehtävässä. Pitkän oppimäärän puolella tehtävissä tarvittiin ratkaisemiseen myös sini- ja kosinilausetta lyhyestä oppimäärästä poiketen. Tämä on tutkijan mielestä hyvä huomata, sillä sini-ja kosinilausetta ei käsitellä lyhyen oppimäärän kurssilla lainkaan. Toinen sisältöalue, joka esiintyi pitkässä oppimäärässä lyhyestä poiketen, on suplementti-, komplementti- ja eksplementtikulmien esiintyminen tehtävissä. Näitä kulmiin liittyviä käsitteitä ei ole myöskään käsitelty lyhyen oppimäärän kurssilla.

Tutkijan mielestä pitkän oppimäärän ylioppilaskokeen tehtävissä korostuu voimakkaasti pinta-alojen laskeminen niin kuvioiden kuin kappaleidenkin osalta. Sen sijaan yhdenmuotoisuus ja ympyrän geometria ovat pienemmässä osassa tehtäviä. Pitkän oppimäärän ylioppilaskokeen tehtävistä löytyi sisältöalueita, jotka eivät esiinny lyhyen oppimäärän kokeissa lainkaan. Nämä tehtävät liittyvät usein sisältöalueisiin, joita ei käsitellä myöskään lyhyen oppimäärän oppikirjoissa. Esimerkiksi pitkän oppimäärän ylioppilaskokeen tehtävissä on kolme todistamiseen liittyvää tehtävää. Tämä on huomattava ero lyhyeen oppimäärään verrattaessa, sillä lyhyen oppimäärän ylioppilaskoetehtävistä todistustehtäviä ei löytynyt. Toisaalta myös pitkän oppimäärän OPS ja oppikirjat korostavat todistamistehtävien roolia lyhyestä poiketen. Seuraavassa luettelossa kerrataankin **oppikirjojen sisältöalueet, jotka löytyivät pitkän oppimäärän oppikirjoista** tärkeinä sisältöalueina **lyhyen oppimäärän oppikirjoista poiketen**. Sisältöalueen jälkeen on aina **suluissa pitkän oppimäärän ylioppilaskokeen tehtävien lukumäärä, joissa kyseinen sisältöalue esiintyy**. Sulkujen sisään on merkitty viiva, jos sisältöalueen mukaisia tehtäviä ei löytynyt tutkittavista tehtävistä.

- minuutti/sekunti/radiaani kulmiin liittyen (-)
- suplementti-, komplementti- ja eksplementtikulma (2 tehtävää)
- kolmion pinta-alan trigonometrinen kaava (1 tehtävä)
- sini- ja kosinilause (2 tehtävää)
- kehäkulma ja siihen liittyvät lauseet (-)
- avaruussuorien välinen kulma, suoran ja tason välinen kulma, kahden tason välinen kulma (-)
- pallokalotin pinta-ala, pallosegmentin tilavuus (-)
- tilavuuslause- kappaleiden yhdenmuotoisuus (-)
- geometristen lauseiden käyttö, todistaminen ja johtaminen (3 tehtävää)

Monista edellä mainituista pitkän oppimäärän oppimäärälle erityisistä sisältöalueista ei siis löytynyt yhtään niitä koskevaa ylioppilaskoetehtävää tutkimuksesta. Tulee kuitenkin huomioida, että pitkän oppimäärän geometrian kurssilla on monia sisältöalueita ja tutkimuksessa on mukana vain rajallinen ja melko pieni otos ylioppilaskokeita. Lisäksi koetta kohden pitkän oppimäärän ylioppilaskokeessa on normaalisti tutkimuksen mukaan yhdestä kolmeen geometrian tehtävää, joten ei voidakaan olettaa, että kaikki sisältöalueet tulisivat jatkuvasti mukaan kokeisiin. Tulee kuitenkin ehkä huomioida, mitä pitkän oppimäärän ylioppilaskokeessa menestymiseen geometrian kannalta ainakin tarvitaan. Olennaista on juuri OPS:ssa mainitut keskeiset sisällöt ja niistä erityisesti pinta-alan käsitteet sekä kolmion trigonometria. Lisäksi pitkässä oppimäärässä geometrian osalta ylioppilaskirjoituksissa on tutkittavissa kokeissa korostunut voimakkaasti todistamistehtävät.

Luku 8

Ylioppilaskirjoitusten syvällisempi tarkastelu

Aiemmissa luvuissa on käsitelty geometrian opetusta opetussuunnitelmien perusteiden, oppikirjojen ja ylioppilaskokeiden kautta. Geometrian opetuksessa on keskitytty pääasiassa lukion lyhyen ja pitkän oppimäärän tarkasteluun, mutta peruskoulun yläluokkien geometrianopetustakin on tarkasteltu lukion oppimääriin verraten. Aiemmissa luvuissa tutkimuksessa on käsitelty geometrian opetuksen keskeisiä sisältöalueita, käsitteitä ja tavoitteita. Tutkimuksessa on keskitytty puhtaasti vain oppimäärien käsitteiden ja sisältöalueiden erotteluun ja luokitteluun eikä ollenkaan esimerkiksi käsitteiden haastavuuden tai tiedon syvällisyyden tarkasteluun.

Tässä luvussa pyritään ylioppilaskirjoitusten geometriaa koskevien tehtävien syvällisempään tarkasteluun. Tutkimuksessa on käsitellään erikseen sekä lukion lyhyen että pitkän oppimäärän tehtäviä. Tarkoituksena on selvittää, millaisia ja kuinka syvällisiä taitoja, kunkin tehtävän ratkaisemiseen tarvitaan. Syvällisempään tarkasteluun on lähdetty, jotta voitaisiin löytää vastauksia siihen, voiko kyseisen oppimäärän ylioppilaskokeen geometrian tehtävät ratkaista saman oppimäärän perustaidoin vai tarvitaanko ratkaisemiseen syvällisempää osaamista käsitteiden hallinnasta. Lisäksi on mielenkiintoista selvittää sitä, voisiko lukion pitkän oppimäärän ylioppilaskokeen geometrian tehtävät ratkaista lyhyen oppimäärän tiedoin. Ja toisaalta ratkeavatko lyhyen oppimäärän ylioppilaskirjoitusten tehtävät peruskoulun yläluokkien tiedoilla.

8.1 Ylioppilaskoetehtävien syvällisempi tarkastelu

Tässä luvussa tarkastellaan vuosien 2010-2012 matematiikan lyhyen ja pitkän oppimäärän ylioppilaskoetehtäviä. Ylioppilaskokeen tehtävistä on valittu lukion geometriakurssiin liittyvät tehtävät, jotka on mainittu aiemmassa luvussa. Kustakin tehtävästä on kirjoitettu tehtävänanto sekä pohdintaa siitä, mitä taitoja tehtävän ratkaisemiseen tarvitaan. Ylioppilaskokeiden tehtävänantoihin ja niihin liittyviin kuviin on käytetty lähteenä MA-FY Valmennuksen internetsivuja, joista löytyvät kaikki viimeaikojen ylioppilaskirjoitusten matematiikan kokeet niin lyhyen kuin pitkänkin oppimäärän kohdalta. Tehtävien ratkaisuista on kirjoitettu työhön tiivistelmät. Ylioppilaskoetehtävien valmiita ratkaisuehdotuksia löytyy paljon internetistä sekä ylioppilaskokeitakokoavassa matematiikan kirjallisuudesta. Tämän takia ratkaisuehdotuksia ei ole kopioitu edellä mainituista lähteistä suoraan tähän työhön, sillä vaikka se toisi lisäsivuja tutkimukseen, ei se varsinaisesti tukisi tutkimuksen varsinaista tarkoitusta. Sen sijaan ratkaisuehdotuksista on kirjoitettu kunkin tehtävän pohdintaosuuteen tiivistelmä tehtävän ratkaisemisen kulusta pääpiirteittäin. Jos lukija tai jatkotutkimusta tekevä tutkija haluaa tutustua tehtävien yksityiskohtaisiin ratkaisuihin tarkemmin, löytyvät ne esimerkiksi MA-FY Valmennus Oy:n internetsivustolta.

Kunkin geometriaan liittyvän ylioppilaskoetehtävän jälkeen on siis pohdintaosuus, jossa on tehtävän ratkaisutiivistelmän lisäksi pyritty tarkastelemaan sekä tehtävän haastavuutta, että siihen sisältyviä sisältöalueita. Lukijan tulee huomioida, että alla kirjoitettujen ylioppilaskoetehtävien tarkastelussa kunkin tehtävänannon päättymistä on merkitty $\square$ merkillä, jonka jälkeen alkaa tehtävän pohdintaosuus. Ratkaisuun tarvittavien taitojen tasojen arviointi perustuu Benjamin Bloomin määrittelemiin Bloomin taksonomioihin. Bloomin taksonomiassa osaaminen jakautuu kuudelle eri tasolle. Ennen ylioppilaskoetehtävien tarkastelua tutkimuksessa on esitelty Bloomin taksonomian perusteet.

8.1.1 Bloomin taksonomia

Bloomin taksonomia on hyödyllinen väline taitotasojen luokitteluun. Bloomin taksonomiaa on käytetty pohjana monissa tutkimuksissa. Esimerkiksi Anna Tähtisen (2011) Pro Gradu tutkielmassa "Orgaaninen kemia ylioppilaskoetehtävissä vuosina 1996-2011"ja Greta Tikkasen (2010) väitöskirjassa "Kemian ylioppilaskokeen tehtävät summatiivisen arvioinnin välineenä". Tähtisen (2011) ja Tikkasen (2010) tutkimuksissa on Bloomin taksonomian kautta on luokiteltu kemian osaamisen tasoja erilaisissa ylioppilaskoetehtävissä. Tässä tutkimuksessa on käytetty Tikkasen ja Tähtisen tutkimuksia apuna Bloomin taksonomian suhteuttamisessa matematiikan ylioppilaskoetehtävien luokitteluun. Tikkasen ja Tähtisen tutkimukset koskevat kemian tehtävien tarkastelua matematiikan sijaan, joten varsinaisia lainauksia tutkimuksista ei ole tehty. Edelliset tutkimukset antoivat kuitenkin tämän tutkimuksen tekijälle selkeän suunnan ylioppilaskoetehtävien tarkasteluun.

Bloomin taksonomia on Benjamin Bloomin vaikutuksesta kehitetty luokitus, jonka avulla voidaan jäsentää tiedon omaksumisen tasoja. Bloomin taksonomiassa osaaminen/tiedon omaksuminen voidaan jakaa kuuteen eri tasoon. Seuraavassa luettelossa on selvitetty

Bloomin taksonomian tasot. Kukin tason kohdalla on myös sulkuihin kirjoitettu tarkemmin esimerkkejä siitä, minkälainen toiminta voi osoittaa kyseisen Bloomin tason mukaisen taidon/tiedon osaamisen. [6] Luettelossa sekä myöhemmissä merkinnöissä on käytetty lyhennysmerkintää "BT", joka tarkoittaa Bloomin taksonomian tasoa. Esimerkiksi merkintä "BT3"tarkoittaa tässä tutkimuksessa Bloomin taksonomian tasoa kolme.

Bloomin taksonomian tasot:

- **BT1: mieleenpalauttaminen**; Testataan oppilaan kykyä muistaa asioita siinä muodossa kuin ne on esitetty. (Oppilaan tulee tehtävän ratkaisussa esimerkiksi listata, määritellä, tunnistaa tai löytää jotakin.)
- **BT2: ymmärtäminen**; Testataan oppilaan kykyä ymmärtää ja tulkita oppimaansa. (Oppilaan pitää tehtävän ratkaisussa esimerkiksi luokitella, erotella, muokata, selittää tai tehdä yhteenveto jostakin.)
- **BT3: soveltaminen**; Testataan oppilaan kykyä käyttää tietoa oikeassa tilanteessa. (Oppilaan täytyy tehtävän ratkaisussa esimerkiksi soveltaa, laskea, muuttaa, luokitella, rakentaa tai yleistää jotakin.)
- **BT4: analysoiminen**: Testataan oppilaan kykyä pilkkoa ongelma pienempiin osiin ja ymmärtää niiden suhteet. (Oppilaan tulee tehtävän ratkaisussa esimerkiksi analysoida, arvioida, yhdistää tai kritisoida jotakin.)
- **BT5: syntetisoiminen**; Testataan oppilaan kykyä luoda jotain uutta olemassa olevan tiedon pohjalta. (Oppilaan täytyy tehtävän ratkaisussa esimerkiksi luokitella, muuttaa, suunnitella, kehittää, laajentaa tai yleistää jotakin.)
- **BT6: arvioiminen**; Testataan oppilaan kykyä arvioida ajatusten ja ratkaisujen arvoa. Tämän tason hallinta sisältää kaikki edellä listatut tasot sekä arviointikriteerit. (Oppilaan pitää tehtävän ratkaisussa esimerkiksi perustella, vertailla, selittää, tulkita tai suhteuttaa jotakin.) [6]

Bloomin taksonomiaa voi tulkita hieman eri tavoin eri tutkijoiden kesken. Seuraavassa on kirjoitettu tämän tutkimuksen tutkijan laatimat esimerkit Bloomin jokaisen tason mukaisesta tehtävästä. Esimerkit on laadittu, jotta olisi mahdollisimman läpinäkyvää se, miten tutkija tulkitsee Bloomin laatimaa teoriapohjaa. Myös jatkotutkimusten kannalta on hyvin tärkeää, että tutkimuksen lukija ymmärtää sen, miten tutkija on osaamisen tasot omassa tutkimuksessaan ymmärtänyt ja luokitellut. Tutkija on käyttänyt oman luokittelunsa ja esimerkkitehtävien miettimisessä apuna Tikkasen (2010) väitöskirjaa sekä Tähtisen (2011) Pro Gradu-tutkielmaa. Edellisissä tutkimuksissa Bloomin taksonomiaa on käytetty erilaisten kemiantehtävien luokitteluun.

Matematiikan esimerkkitehtävät Bloomin taksonomian tasoille:

- **BT1**: Tehtävässä pitää **tunnistaa** erilaisia geometrisia muotoja nimeltä.
- **BT2**: Tehtävässä pitää **luokitella** geometrisia muotoja niiden ominaisuuksien perusteella.
- **BT3**: Tehtävässä pitää **käyttää** Pythagoraan lausetta **tilanteessa, johon se soveltuu**.
- **BT4**: Tehtävässä pitää **erottaa** ongelmasta tarvittava matemaattinen tieto ja **yhdistää** tietoa **ymmärtäen tietojen väliset suhteet**.
- **BT5**: Tehtävässä pitää **luoda jotain uutta matemaattista tietoa** olemassa olevan tiedon pohjalta.
- **BT6**: Tehtävässä pitää **arvioida** matemaattista tietoa ja **tarkastella** esimerkiksi matemaattisen kaavan merkitystä matematiikan eri osa-alueiden kannalta.

Seuraavissa alakappaleissa matematiikan ylioppilaskoetehtävät on luokiteltu aiempien esimerkkitehtävien tapaan Bloomin taksonomien mukaisesti. Tehtävien haastavuuden analysoinnissa on käytetty oppimääristä lyhyenteitä, jotta pohdintaosuuksien olennainen tieto tulisi ytimekkäämmin esille. Oppimääristä on käytetty seuraavia lyhyenteitä: lyhyt oppimäärä= LOM, pitkä oppimäärä= POM ja peruskoulun yläluokat=PKY. Jo aiemmin on tullut esille, että lyhyen oppimäärän ylioppilaskokeessa esiintyvät tehtävät on sisältöalueiden puolesta ratkaistavissa pitkän oppimäärän tiedoin. Lyhyen oppimäärän tehtävissä ei ole tarkkailtu ratkaisuehdotuksia pitkän oppimäärän kannalta. Toisaalta taas pitkän oppimäärän tehtäviä ei ole analysoitu peruskoulun yläluokkien osalta. Tehtävän ratkaisuksi on annettu tutkijan mieleinen ratkaisumalli, mutta ratkaisumalleja on useimmissa tehtävissä muitakin. Vaihtoehtoisia ratkaisumalleja ei ole kuitenkaan käsitelty tässä tutkimuksessa.

8.1.2 Lyhyt oppimäärä - ylioppilaskoetehtävien tarkastelu

s12/2b Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 4,9 m ja kateetin pituus 2,3 m. Laske toisen kateetin pituus 0,1 metrin tarkkuudella. □

Tehtävä ratkaistaan sijoittamalla annetut hypotenuusan ja toisen kateetin arvot Pythagoraan lauseeseen. Saadaan puuttuvan kateetin arvo ja pyöristetään se haluttuun tarkkuuteen. (BT3)

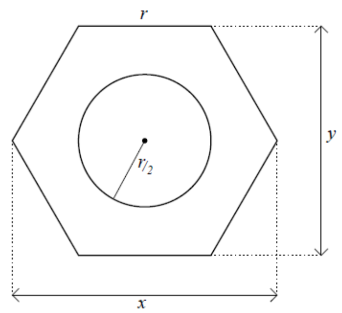
Ratkaistavissa: LOM perustiedot, PKY perustiedot soveltaen.

s12/9 Tarkastellaan oheisen kuvan mukaista säännöllistä kuusikulmiota, jonka sivun pituus on r.

a) Johda leveyden x lauseke sivun pituuden r avulla lausuttuna.

b) Johda korkeuden y lauseke sivun pituuden r avulla lausuttuna.

c) Laske kuusikulmion ja ympyrän väliin jäävän alueen pinta-ala, kun ympyrän säde on $\frac{r}{2}$.



□

Tehtävän ratkaisu jakautuu kolmeen osa-kohtaan.

a. Tehtävässä tulee osata hahmottaa annettua kuvaa ja tulkita oikein siinä annettuja arvoja. Tehtävä ratkaisu aloitetaan selvittämällä yhden kulman suuruus säännöllisen kuusikulmion kulmien summan kaavalla. Sitten kuvaan piirretään uusi suorakulmainen kolmio, jota tehtävässä ei ole valmiiksi annettu. Kolmion muodostamiseen tulee huomioida moninaisesti kuvassa valmiiksi annetut arvot, kuusikulmion säännöllisyys sekä kulmiin liittyvät lauseet. Kolmion määrittämisen jälkeen voidaan kolmioista ratkaista sinin avulla kolmion toinen kanta a. Kuusikulmion leveyden kaava saadaan lopulta johdettua osien summasta: $x = r + 2a$. (BT5)

b. Ratkaisussa tulee osata tulkita kuvaa ja a-kohdassa selvitettyjä arvoja. Huomataan, että kuvaan muodostuu myös tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus r. Lisäksi huomataan, että kolmion korkeus on puolet kuusikulmion korkeudesta y. Selvitetään y:n arvo taulukkokirjan kaavan avulla. (BT5)

c. Ratkaisussa kuusikulmio jaetaan kahteen yhtä suureen puolisuunnikkaaseen ja lasketaan näiden pinta-ala puolisuunnikkaan pinta-alan kaavalla. Lasketaan ympyrän pinta-ala ja lasketaan kysytty pinta-ala selvitettyjen pinta-alojen erotuksen avulla. (BT4)

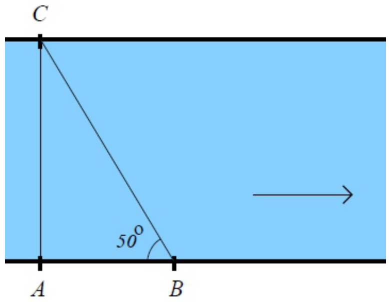
Ratkaistavissa: LOM syventävät taidot, PKY ei mahdollista (monikulmion kulmien summa ei kuulu oppimäärään).

s12/10 Suoran ympyräkartion sisällä on suora ympyrälieriö, jonka pohja on kartion pohjalla ja yläreuna sivuaa kartion vaippaa. Lieriön pohjan halkaisija on yhtä suuri kuin sen korkeus. Toisaalta lieriön pohjan halkaisija on puolet kartion pohjan halkaisijasta. Kuinka monta prosenttia lieriön tilavuus on kartion tilavuudesta? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella. □

Tehtävässä tulee piirtää tehtävän annon mukainen kuva tilanteen ja arvojen hahmottamiseksi. Piirretään kappaleen sisälle yhdenmuotoiset kolmiot (kk), jossa suuremman kolmion korkeus vastaa kartion korkeutta. Vastinjanojen avulla luodaan verranto ja ratkaistaan pienemmän kolmion korkeus. Lasketaan selvitettyjen arvojen avulla lieriön ja kartion tilavuudet. Selvitetään kysytty prosenttiosuus ja pyöristetään se määrättyyn tarkkuuteen. (BT4)

Ratkaistavissa: LOM syventävät taidot, PKY syventävät taidot.

k12/6 Biologi haluaa arvioida joen leveyttä, jotta hän voi asettaa kalojen liikkumista mittaavia laitteita jokeen. Hän katsoo joen rannalla olevasta pisteestä A kohtisuoraan vastarannalla olevaa pistettä C. Pisteestä A hän kävelee 30 metriä alavirtaan pisteeseen B, josta katsottuna vastarannan piste C näkyy 50 asteen kulmassa alla olevan kuvan mukaisesti. Laske joen leveys AC metrin tarkkuudella.



□

Ratkaisussa huomataan, että kuvaan muodostuu suorakulmainen kolmio ABC, jonka toinen kateetti on 30m ja toinen selvitettävä joen leveys l. Ratkaistaan l laskemalla suorakulmaisen kolmion tangentin arvo. (BT3)

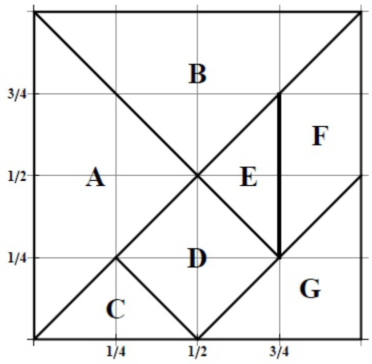
Ratkaistavissa: LOM perustiedot, PKY perustiedot soveltaen.

s11/2a Kolmiossa ABC kulma A on 28° ja kulman B vieruskulma 110°. Määritä kulmien B ja C suuruudet. □

Tehtävä ratkaistaan piirtämällä kuva ja käyttämällä seuraavia tietoja: vieruskulmalause ja kolmion kulmien summa. (BT3)

Ratkaistavissa: LOM perustiedot, PKY perustiedot.

s11/3 Kiinalaisen Tangram-pelin pelilaatat saadaan jakamalla neliö osiin oheisen kuvan mukaisesti. Ilmoita osien pinta-alat, kun koko neliön sivun pituus on 1.



□

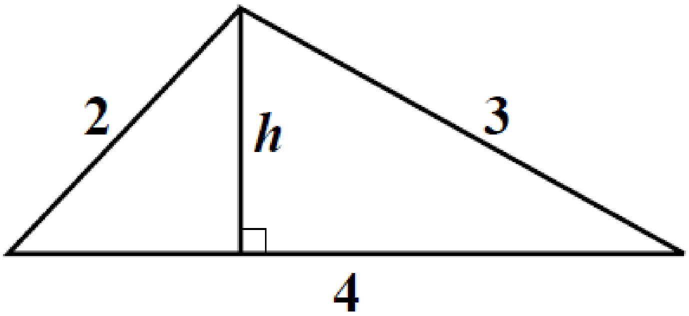
Ratkaisussa kuvasta tulee tulkita osien pituuksia. Lasketaan kolmioiden pinta-alat kolmion pinta-alan kaavaa käyttäen. Kuvio F tulee tunnistaa suunnikkaaksi yhtä pitkistä vastakkaisista sivuista ja laskea sen pinta-ala. Kuvio D muodostuu kahdesta samankokoisesta kolmiosta, jonka ala on jo laskettu. Murtoluvut tuovat hieman haastetta laskutoimituksiin. (BT3)

Ratkaistavissa: LOM perustiedot, PKY syventävät tiedot.

s11/7 Kolmion sivujen pituudet ovat 2, 3 ja 4.

a) Laske pisintä sivua vastaava korkeus h kahden desimaalin tarkkuudella.

b) Laske kolmion kulmien suuruudet asteen tarkkuudella.



□

Ratkaistaessa tehtävää huomataan, että korkeusjana jakaa kolmion kahteen suorakulmaiseen kolmioon, joiden kateetit ovat seuraavat: (pienempi kolmio) x ja h sekä (suurempi kolmio) $4 - x$ ja h. Selvitetään molemmista kolmioista Pythagoraan lauseella arvo h^2 ja tehdään sijoitus toiseen yhtälöön, saadaan selville x. Tämän jälkeen selvitetään kysytty korkeus h. Tehtävässä tarvitaan melko kehittyneitä yhtälön ratkaisun taitoja. (BT4)

Ratkaistavissa: LOM syventävät tiedot, PKY todella syventävät tiedot.

s11/8 Grönlannin mannerjäätikön laajuus on 1 834 000 km^2 ja paksuus noin 2 km. Kuinka paljon valtameren pinta kohoaa, jos jäätiköstä sulaa 30 tilavuusprosenttia? Jään tiheys on 0,9 kg/dm^3 ja veden tiheys 1,0 kg/dm^3. Maapallon pinta-alasta on 71 prosenttia valtameriä ja maapallon säde on 6 400 km. Anna vastaus 0,1 metrin tarkkuudella. □

Ratkaistaan ensin mannerjäätikön tilavuus, sitten sulan osan tilavuus. Sen jälkeen määritetään sulan osan massa ja sulaneen osan tilavuus vetenä. Määritetään maapallon pinta-ala ja siitä valtameren osuus (71%). Meren pinnan kohoaminen selvitetään yhtälöllä, kun nyt tiedetään jo valtamerien ala ja sulan jään tilavuus vetenä. Tehtävässä tarvitaan hyvin kehittyneitä yhtälönratkaisutaitoja sekä tilavuuden käsitteen hahmottamista (BT5)

Ratkaistavissa: LOM syventävät taidot, PKY:lle liian haastava.

k11/2a Suorakulmaisen kolmion toisen kateetin pituus on 2 ja hypotenuusan pituus 5. Laske kolmion terävien kulmien suuruudet asteen tarkkuudella. □

Ratkaistaan tehtävä selvittämällä suorakulmaisesta kolmioista kulmat sinin ja cosinin avulla. (BT3)

Ratkaistavissa: LOM perustiedot, PKY perustiedot.

k11/4 Muinaiset egyptiläiset laskivat ympyrän pinta-alan sellaisen neliön alana, jonka sivun pituus on $\frac{8}{9}$ ympyrän halkaisijasta.

a) Laske tällä säännöllä ympyrän ala, kun sen halkaisija on 5.

b) Onko edellä saatu ala liian suuri vai liian pieni? Kuinka suuri virhe on prosentteina? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella. □

Tehtävän ratkaisu jakautuu kahteen osa-kohtaan.

a. Määritetään ensin egyptiläisen neliön sivun pituus ja sen pinta ala annettujen arvojen sijoittamisella kaavaan. (BT3)

b. Lasketaan vertailuympyrän pinta-ala ja verrataan sitä aiemmin saatuun pinta-alaan. Lopulta lasketaan pinta-alan virhe prosenttilaskun avulla. (BT3)

Ratkaistavissa: LOM perustiedot, PK syventävät tiedot

k11/6 A4-kokoisen kartan mittakaava on 1:20 000. Kartta pienennetään kopiokoneella A5-kokoiseksi, jolloin sen pinta-ala pienenee puoleen, mutta muoto säilyy. Mikä on pienennetyn kartan mittakaava? □

Tehtävänantoa seuraten saadaan karttojen pinta-aloista lauseke $A_2 = \frac{1}{2}A_1$ eli $\frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{2}$. Koska (pinta-alalauseen mukaan) pinta-alojen suhde on vastinpituuksien neliö, saadaan ratkaistua selville A4- ja A5- karttojen vastinsivujen suhde toisiinsa. Tiedetään suhde A4-kartan suhde luonnon kanssa. Käytetään tätä hyväksi ja luodaan verranto, johon sijoitetaan A4-kartan vastinsivuarvon tilalle A5-kartan vastaava arvo. Lasketaan verranto loppuun ja saadaan selville A5-kartan mittakaava. (BT4)

Ratkaistavissa: LOM syventävät tiedot, PKY mahdoton ratkaista (pinta-alalause ei kuulu oppimäärään).

s10/2ab a) Ympyrän kehän pituus on 10,25m. Määritä ympyrän pinta-ala 0,01 neliömetrin tarkkuudella. □

b) Suorakulmaisessa kolmiossa toisen terävän kulman sini on 0,123. Laske kolmion terävät kulmat asteen tarkkuudella. □

Tehtävän ratkaisu jakautuu kolmeen osa-kohtaan, josta kaksi ensimmäistä on geometrian tehtäviä.

a. Ratkaistaan ympyrän säde ympyrän kehän pituuden kaavasta. Lasketaan ympyrän pinta-ala. Annetaan vastaus halutulla tarkkuudella. (BT3)

b. Ratkaisussa käytetään sijoittamalla arvot kaavaan seuraavia käsitteitä: suorakulmaisen kolmion sini ja kolmion kulmien summa. (BT3)

Ratkaistavissa: LOM perustiedot, PKY perus/syventävät tiedot.

s10/4 Määritä suorakulmaisen kolmion muotoisen tontin sivujen pituudet ja pinta-ala, kun kartasta mitattuna kahden pisimmän sivun pituudet ovat 92mm ja 73mm. Kartan mittakaava on 1 : 2 000. □

Piirretään kuva ja hahmotetaan siitä pisimmät sivut. Ratkaistaan Pythagoraan lauseella toisen kateetin pituus. Merkitään kartan ja sitä vastaavan tontin sivujen pituuksia niitä vastaavilla kirjaimilla. Mittakaava on vastinpituuksien suhde, joten sen avulla yksikerrallaan kaikki tontin sivujen pituudet. Lopulta lasketaan tontin pinta-ala kolmion pinta-alan kaavalla. (BT4)

Ratkaistavissa: LOM perustiedot, PKY syventävät tiedot.

s10/10 Suoran ympyräkartion korkeus on sama kuin sen pohjan halkaisija, kumpikin suuruudeltaan $= 1$. Kartion sisään asetetaan pallo, joka sivuaa kartion vaippaa ja pohjaa. Kuinka monta prosenttia pallon tilavuus on ympyräkartion tilavuudesta? Anna vastaus prosenttiyksikön tarkkuudella. □

Ratkaisun avuksi tulee piirtää kuva, joka hahmottaa kuvion arvojen suhdetta toisiinsa. Kuva on leikkauskappaleiden keskeltä, jossa tasasivuisen kolmion K_t sisällä on ympyrä, joka sivuaa kolmion kylkiä sekä pohjaa. Kun piirretään ympyrän säde kulkemaan kohti suorasti kolmion K_t sivua vasten, saadaan kuvioon muodostumaan suorakulmainen kolmio K_s, joka on yhdenmuotoinen (kk) toisen kolmion K_p kanssa (joka on puolet tasasivuisesta kolmiosta K_t). Lasketaan kolmioiden K_t ja K_p yhteisen sivun pituus Pythagoraan lauseella. Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinsivujen suhde on vakio, saadaan verrannolla selville kolmion K_s kateetin pituus, joka on samalla ympyrän säde. Lasketaan arvojen avulla pallon tilavuus, kartion tilavuus sekä pallon tilavuuden prosenttiosuus kartion tilavuudesta. Tehtävässä on haastavaa kaksi- ja kolmiulotteisen tilanteen yhdistäminen ja hahmottaminen. (BT5)

Ratkaistavissa: LOM syventävät tiedot, PKY liian haastava.

k10/2a Neliön pinta-ala on $1,20m^2$. Laske neliön lävistäjän pituus senttimetrin tarkkuudella. □

Ratkaisussa voi kuvan avulla hahmottaa suorakulmaisen kolmion liittymisen tehtävään. Lasketaan ensin neliön (=kolmion kateetti) sivun pituuden arvo x neliön pinta-alan kaavasta. Neliön lävistäjä on sama kuin suorakulmaisen kolmion hypotenuusa, joten selvitetään se Pythagoraan lauseella. Annetaan vastaus pyydetyllä tarkkuudella. (BT3)

Ratkaistavissa: LOM perustiedot, PKY syventävät tiedot.

k10/7 Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 3,2 cm ja 5,7 cm. Laske hypotenuusan pituus ja suoran kulman kärjen etäisyys hypotenuusasta. □

Ratkaisun helpottamiseksi piirretään kuva, jossa annetun kolmion suoran kulman kärjestä on piirretty suora h hypotenuusalle. Suora h on kohtisuorassa hypotenuusaa vasten. Ratkaistaan ensin hypotenuusan pituus Pythagoraan lauseen avulla. Huomataan, että kolmion alan voi määrittää kahden korkeuden avulla, riippuen siitä mikä on kolmion kanta. Määritetään nämä alat ja sijoitetaan toisen arvo toiseen yhtälöön. Saadaan selville tehtävässä kysytty h. (BT4)

Ratkaistavissa: LOM syventävät tiedot, PKY liian haastava.

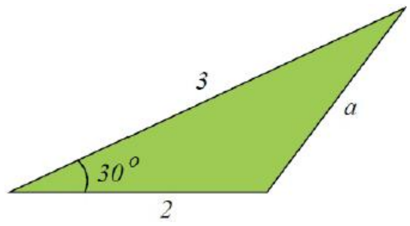
k10/10 Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 2 ja 3. Kolmio pyörähtää täyden kierroksen lyhyemmän kateettinsa ympäri, jolloin syntyy avaruuskappale. Piirrä kappaleen kuva ja laske sen tilavuus. □

Ratkaisussa tulee osata hahmottaa syntyvän kappaleen yhteydet annettuun kolmioon. Piirtämällä syntyy ympyräkartio, jonka tilavuus voidaan laskea suoraan annetuilla arvoilla sekä ympyräkartion tilavuuden kaavalla. (BT3)

Ratkaistavissa: LOM perustiedot, PKY syventävät tiedot.

8.1.3 Pitkä oppimäärä - ylioppilaskoetehtävien tarkastelu

s12/4b Laske oheisessa kuvassa olevan kolmion sivun pituuden a tarkka arvo ja kaksi desimaalinen likiarvo.



□

Tehtävässä kysytty sivun a pituus ratkaistaan sijoittamalla annetut arvot kosinilauseen kaavaan. Vastauksessa a:n pituuden arvo ilmoitetaan tarkkana arvona sekä pyöristettynä likiarvona. (BT3)

Ratkaistavissa: POM perustiedot, LOM ei ratkaistavissa (kosinilause ei kuulu oppimäärään).

s12/15*a Suora ympyrälieriö on pallon sisällä niin, että sen molempien pohjien reunat sivuavat pallon pintaa. Pallon pinta-alan suhdetta lieriön koko pinta-alaan merkitään symbolilla t. Lieriön koko pinta-alalla tarkoitetaan sen vaipan ja pohjien yhteenlaskettuja pinta-aloja.

a) Määritä lieriön korkeuden suhde lieriön pohjan säteeseen parametrin t avulla lausuttuna. □

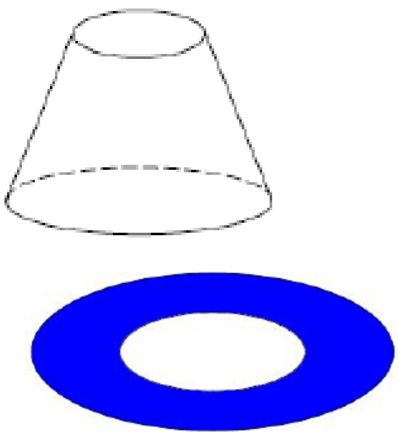
Tehtävä on ns. jokeri-tehtävä, eli vaikeustasoltaan haastavampi ja tehtävästä on mahdollisuus saada yhdeksän pistettä normaalin kuuden sijasta. Tehtävän ratkaisu jakautuu neljään osa-kohtaan, josta a-kohta on suhteellisen puhdasta geometriakurssin sisältöä ja loput kohdat liittyvät enemmänkin analyyttiseen geometriaan ja vaativampaan yhtälönratkaisuun.

a. Tehtävässä tulee osata piirtää kuvailtu geometrinen konstruktio, jotta kyseinen tilanne sekä siihen liittyvät arvot voidaan paremmin hahmottaa. Huomataan, että lieriön sisälle muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka toinen kateetti on lieriön korkeus $\frac{h}{2}$, toinen kateetti lieriön pohjan säde r sekä hypotenuusa

on sama kuin pallon säde R. Muodostetaan pallon säteelle arvo Pythagoraan lauseella. Ilmoitetaan pallon pinta-ala pallon pinta-ala edellisten arvojen avulla. Lisäksi ratkaistaan lieriön pinta-ala. Lopulta voidaan luoda yhteenvetona kaavoista pinta-alojen suhde t, josta saadaan vastaus $t = \frac{h^2+4r^2}{2r^2+2rh}$
Vastaus a-kohdassa kysyttyyn kysymykseen saadaan, kun muokataan saatua $t = \frac{h^2+4r^2}{2r^2+2rh}$ melko haastavin yhtälönratkaisun keinoin. Yhtälönratkaisussa merkitään välivaiheissa tilanteen selventämiseksi $\frac{h}{r} = z$. Lopulta saadaan, että $\frac{h}{r} = t \pm \sqrt{t^2 + 2t - 4}$. (BT5)

Ratkaistavissa: POM syventävät tiedot, LOM liian haastava.

k12/9 Suoran ympyräkartion korkeus on 5,0 cm, ja sen pohjan säde on 2,0 cm. Kartio katkaistaan niin, että yläreunan säde on 1,0 cm. Tämän jälkeen katkaistun kartion vaippa maalataan siniseksi ja sitä pyöritetään kyljellään paperilla. Määritä näin saadun sinisen rengasalueen pinta-ala yhden neliösenttimetrin tarkkuudella.



□

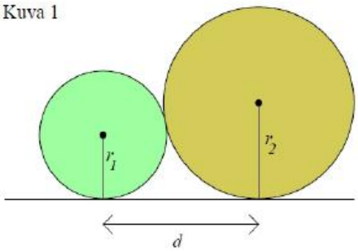
Tehtävän ratkaisun saamiseksi annetusta tilanteesta on piirrettävä kuva, joka hahmottaa geometristen osien ja niihin liittyvien arvojen suhdetta toisiinsa. Kuvaan syntyy kaksi kartiota sisäkkäin niin, että pienemmän kartion K_p sivujanat ovat osa suuremman kartion K_i sivujanoja. Toisin sanoen pienempi kartio K_p ja tehtävässä kuvailtu "katkaistu kartio"K_k muodostavat yhdessä ison kartion K_i. Ison kartion K_i sisään muodostuu kolmio ABC, jonka hypotenuusa (=K_i:n sivujana) saadaan selville Pythagoraan lauseella. Pienemmän kartion K_p sisällä on kolmio, joka on yhdenmuotoinen kolmion ABC kanssa (kk). Vastin sivujen suhteilla saadaan muodostettua verranto, jonka avulla ratkaistaan pienemmän kolmion hypotenuusa ($=K_p$:n sivujana). Hypotenuusien erotuksena saadaan selville kysytyn rengasalueen renkaan "leveys". Rengasaluetta on hyvä mallintaa piirtämällä uusi kuva, joka kuvaa rengasaluetta ja siihen liittyviä arvoja. Rengasalueen pinta-ala saadaan laskettua kahden ympyrän pinta-alojen erotuksella. (BT4)

Ratkaistavissa: POM syventävät tiedot, LOM syventävät tiedot/liian haastava.

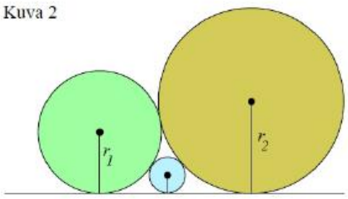
k12/15* a) Kaksi ympyrää sivuaa toisiaan ja x-akselia kuvan 1 mukaisesti. Määritä ympyröiden keskipisteiden vaakasuora etäisyys d niiden säteiden avulla lausuttuna. (3 p.)

b) Kolme ympyrää sivuaa toisiaan ja x-akselia kuvan 2 mukaisesti. Määritä keskimmäisen ympyrän säde r_3 kahden reunimmaisen ympyrän säteiden avulla lausuttuna. (3 p.)

Kuva 1



Kuva 2



c) Todista René Descartesin (1596 - 1650) keksimä b-kohdan ympyröihin liittyvä kaava $(k_1 + k_2 + k_3)^2 = 2\left({k_1}^2 + {k_2}^2 + {k_3}^2\right)$, jossa $k_1 = \frac{1}{r_i}$, $i = 1, 2, 3$. (3 p.) $\square$

Tehtävä on ns. jokeri-tehtävä, eli vaikeustasoltaan haastavampi ja tehtävästä on mahdollisuus saada yhdeksän pistettä normaalin kuuden sijasta. Tehtävän ratkaisu jakautuu kolmeen osa-kohtaan.

a. Tutkitaan kahta tapausta erikseen. Ensin tutkitaan tapausta, jossa $r_1 \neq r_2$. Merkitään pienemmän ympyrän sädettä r_1. Jatketaan kuvaa yhdistämällä ympyröiden keskipisteet janalla k (jonka pituudeksi tulee säteiden summa). Piirretään toinen jana d_1 pienemmän ympyrän keskipisteestä kohtisuoraan isomman ympyrän sädettä vasten (säde, joka on tehtävänannon kuvassa). Jana d_1 pituus on tehtävän annossa kysytty etäisyys d. Kuvioon syntyy suorakulmio, jonka hypotenuusa on k ja kateetit d_1 ja a. Huomataan, että a:n pituus on $r_2 - r_1$. Selvitetään d_1:n pituus Pythagoraan lauseella.

Tutkitaan tapaus, jossa $r_1 = r_2$. Silloin kuvaan syntyy suorakaide, josta nähdään, että $d_2 = r_1 + r_2 = 2r_1$. Tämän tiedon avulla saadaan lopulta ratkaistua d_2 ja huomataan, että $d_2 = d_1$. (BT5)

b. Sovelletaan a-kohdassa johdettua kaavaa b-kohdan ympyröihin ja saadaan yhtälöpari. Toisaalta huomataan, että keskimmäisen ympyrän keskipisteen vaakasuora etäisyys vasemmalla puoleisen ympyrän keskipisteestä d_3 ja keskimmäisen ympyrän keskipisteen vaakasuora etäisyys oikean puoleisen ympyrän keskipisteestä d_4 välillä on yhteys. Pituuksia tarkasteltaessa $d_3 + d_4 = d_1$. Sijoitetaan tähän yhtälöparin arvot ja saadaan selville keskimmäisen ympyrän säde r_3. (BT5)

c. Tehtävän ratkaisemiseen tarvitaan kehittyneitä yhtälönratkaisun taitoja. Kirjoitetaan väitteessä annettu yhtälö ja aukaistaan termit ja siirretään niitä niin, että yhtälön toiselle puolella on vain luku 0. Otetaan käsittelyyn b-kohdan vastaukseksi saatu yhtälö keskimmäisen ympyrän säteen kaavasta ja muokataan sitä sekä lopulta sijoitetaan yhtälöön tehtävänannossa annettu tieto $k_i = \frac{1}{r_i}, i = 1, 2, 3$. Muokataan yhtälöä edelleen ja saadaan tehtävän alussa muokattu alkuperäisyhtälö. (BT5)

Ratkaistavissa: POM haastava syventävilläkin tiedoilla, LOM liian haastava.

s11/1b Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 5 ja toisen kateetin pituus 2. Laske toisen kateetin pituus.

Ratkaistaan tehtävä sijoittamalla annetut arvot Pythagoraan lauseeseen. (BT3)

Ratkaistavissa: POM perustiedot, LOM perustiedot.

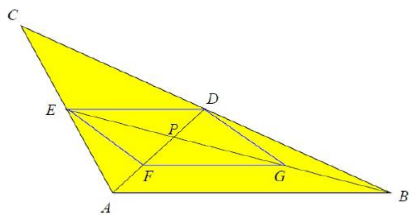
s11/15* Merkitään kolmion ABC keskijanojen AD ja BE leikkauspistettä kirjaimella P.

a) Jos F on janan AP keskipiste ja G janan BP keskipiste, niin osoita, että janan FG pituus on puolet janan AB pituudesta. (2 p.)

b) Osoita, että nelikulmio $FGDE$ on suunnikas. (2 p.)

c) Osoita, että janan DP pituus on kolmasosa janan AD pituudesta. (2 p.)

d) Todista edellisten kohtien perusteella seuraava lause: Kolmion keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka jakaa jokaisen keskijanan siten, että sivun puoleisen osan pituus on kolmasosa koko keskijanan pituudesta. (3 p.)



□

Tehtävä on ns. jokeri-tehtävä, eli vaikeustasoltaan haastavampi ja tehtävästä on mahdollisuus saada yhdeksän pistettä normaalin kuuden sijasta. Tehtävän ratkaisu jakautuu neljään osa-kohtaan.

a. Tehtävässä tarkastellaan ensiksi kuviossa olevien kolmioiden vastinsivujen suhdetta ja käytetään hyväksi tehtävänannossa mainittua ehtoa keskipisteisiin liittyen. Huomataan lisäksi yhdenmuotoisia kolmioita yhdenmuotoisuuslauseiden nojalla (sks). Yhdenmuotoisuudella saadaan perusteltua väite. (BT5)

b. Keskitytään taas vastinsivujen suhteisiin sekä kolmioiden yhdenmuotoisuuteen (sks). Yhdenmuotoisuudesta seuraa tiettyjen kulmien yhtäsuuruus sekä tiettyjen sivujen yhdensuuntaisuus. Käytetään äskeisiä keinoja uudelleen erisivuihin ja kulmiin. Yhdensuuntaisuudesta seuraa, että samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret ja lopulta saadaan taas yhdet kolmiot todistettua yhdenmuotoisiksi (sks), jonka avulla saadaan selville tiettyjen kulmien yhtä suuruus sekä sivujen yhdensuuntaisuus. Lopulta on osoitettu, että nelikulmion vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, joten kyseinen nelikulmio on suunnikas. (BT5)

c. Ratkaisussa viitataan samankohtaisten kulmien yhtäsuuruuteen sekä edellisten kohtien tietoihin. Sadaan selville yhdenmuotoiset kolmiot (ksk). Vastin sivujen pituudet vastaavat toisiaan ja saadaan lopuksi aikaiseksi yhtälö, josta ratkaisu selviää. (BT5)

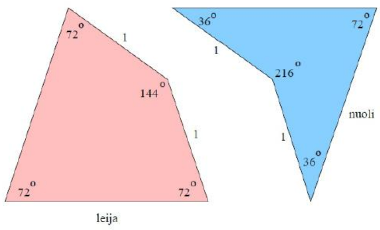
d. Piirretään avuksi uusi kuva, jossa keskijanat leikkaavat toisensa. Selvitetään leikkauspisteen etäisyys yhden keskijanan päätepisteestä. Todistetaan väite a-c-kohtien tavoin. Tämä tulos voidaan perustelemalla yleistää pätemään myös kahta muuta keskijanaa. (BT5)

Ratkaistavissa: POM erittäin syventävät tiedot (kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseet ovat kurssin syventäviä tietoja/ekstra-osiota), LOM ei ratkaistavissa (kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseet eivät kuulu oppimäärään).

k11/7 Osa Helsingin Keskuskatua muutettiin kävelykaduksi ja päällystettiin Penrosen laatoilla, jotka keksi englantilainen matemaatikko Roger Penrose 1970-luvulla. Niiden avulla taso voidaan laatoittaa äärettömän monella eri tavalla niin, ettei laatoitus ole jaksollinen. Laattoja on kahta eri muotoa, leija ja nuoli. Molemmat ovat nelikulmioita, joiden kulmien suuruudet ja osa sivujen pituuksista on merkitty kuvioon.

a) Laske muiden sivujen pituuksien likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.

b) Laske laattojen pinta-alojen likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.



□

Tehtävän ratkaisu jakautuu kahteen osa-kohtaan.

a. Piirretään leijasta uusi kuva ja puolitetaan suurinta kulmaa vastassa oleva kulma, syntyy kaksi kolmiota, jotka ovat yhteneviä (ssk). Yhtenevyydestä saadaan selville lisää kulmien suuruuksia. Jatketaan toisen kolmion tarkkailua (ei ole väliä kumpi valitaan, koska yhteneviä). Huomataan, että kolmio on tasakylkinen ja jakamalla se pohjasivun keskikohdasta kärkeen ulottuvalla janalla puoliksi saadaan kaksi suorakulmaista kolmiota. Ratkaistaan kulma suorakulmaisen kolmion trigonometrisellä ominaisuudella cosini.

Piirretään uusi kuva, jossa leija ja nuoli ovat kiinni toisissaan ja muodostavat yhdessä suunnikkaan (vastakkaiset kulmat yhtä suuret). Suunnikas on neljäkäs, koska vierekkäiset sivut ovat samat. Saadaan ratkaistuksi muiden sivujen pituus, joka on sama arvo kullakin sivulla. (BT5)

b. Määritetään "halkaistu leijan"pinta-ala kolmion pinta-alan trigonometrisen kaavan avulla ja kerrotaan se kahdella. Määritetään neljäkkään ala. Lasketaan nuolen pinta-ala vähentämällä neljäkkään pinta-alasta nuolen pinta-ala. (BT4)

Ratkaistavissa: POM syventävät tiedot, LOM ei ratkaistavissa (kulmien erityisominaisuudet, pinta-alan trigonometrinen kaava ja kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseet eivät kuulu oppimäärään).

s10/5 Vene A ylittää joen 45 asteen kulmassa nopeudella 16 km/h, ja vene B ylittää joen 30 asteen kulmassa nopeudella 14 km/h. Molemmat kulmat on mitattu joen poikkisuunnasta. Veneet lähtevät yhtä aikaa. Kumpi veneistä pääsee vastarannalle aikaisemmin? □

Ratkaisua helpottaa, kun piirtää tehtävänantoa vastaavan kuva, jossa on pystysuorat suorat ovat joen reunoina, vaakasuora jana vastaamassa joen leveyttä x, veneen A kulkureitti S_A (muodostaa 45°:en kulman x:n kanssa) ja veneen B kulkureitti S_B (muodostaa 30°:en kulman x:n kanssa). Kulkureitit alkavat ja loppuvat pystysuoriin suoriin. Näin muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota, joiden yhteinen kateetti on x ja hypotenuusa on molemmille kolmiolle ominainen kulkureitti (joko S_A tai S_B). Huomataan, että veneen kulkema matka voidaan määrittää kummastakin suorakulmaisesta kolmiosta cosinin avulla: $S_A = \frac{x}{cos45°}$ ja $S_B = \frac{x}{cos30°}$. Lasketaan kummankin reitin matkaan kulutettu aika erikseen sijoittamalla arvot kaavaan $t = \frac{s}{v}$. Huomataan, että vene B pääsee nopeammin vastarannalle. (BT4)

Ratkaistavissa: POM perustiedot, LOM syventävät tiedot.

s10/9 Arkhimedeen lain mukaan vedessä kelluvan esineen syrjäyttämän veden paino ja esineen paino ovat samat. Pyöreästä ja tasapaksusta puutukista jää veden yläpuolelle sen halkaisijasta viidesosa. Määritä tukin tiheys. Veden tiheytenä käytetään arvoa 1,00 kg/dm^3. □

Tehtävässä tulee yhdistää luontevasti geometrian ja yhtälönratkaisun taitoja sekä tiheyden käsitettä. Piirretään ensin tukin poikkileikkauksesta kuva, joka havainnollistaa myös veden pinnan tason. Pystytään selvittämään, että $x = \frac{2}{5}r$, jossa r on ympyrän (tukin) säde ja x säteestä pinnalle jäävä osa. Kuvioon syntyy kolmio K ympyrän sisään, jonka kanta on ympyrän läpi piirretty jana, (joka kuvaa veden pinnan korkeutta), korkeus on $r - x$ ja sivut r. Jos kolmio jaetaan kahtia, saadaan kaksi suorakulmaista kolmiota. Suorakulmaisen kolmion K_s avulla saadaan selvitettyä $\frac{1}{2}$ K:n kannasta Pythagoraan lauseella.

Sitten lasketaan kolmion K pinta-ala. Määritetään suorakulmaisesta kolmiosta K_s kulman α (kärki ympyrän keskipisteessä) suuruus cosinin avulla. Selvitetään ympyrästä kulman β suuruus, joka on $360° - 2\alpha$. Lasketaan kulmaa β vastaavan sektorin S pinta-ala. Tukista pinnan alle jäävän osuuden ala A_1 saadaan laskemalla sektorin S ja kolmion K pinta-alojen summa. Jatketaan tehtävän ratkaisua selvittämällä koko tukin (=ympyrän) poikkipinta-ala A_2. Huomataan, että tukin tilavuus $V_2 = A_2 h$ ja tukin syrjättämän veden tilavuus $V_1 = A_1 h$, joissa $h =$ tukin pituus. Merkitään $p_1 =$ veden tiheys ja $p_2 =$tukin tiheys. Kappaleen massa on suoraan verrannollinen kappaleen painoon, joten $p_1 V_1 = p_2 V_2$. Ratkaistaan yhtälö ja saadaan selville puun tiheys p_2. (BT4)

Ratkaistavissa: POM syventävät tiedot, LOM ei ratkaistavissa (haastava tehtävä + tiheyden käsitteen yhdistäminen puhtaaseen geometriaan haastavaa + kulmien erityisominaisuudet eivät kuulu oppimäärään).

s10/15* a) Miten määritellään tylppäkulmainen kolmio? (2 p.)

b) Johda kolmion pinta-alan kaava käyttäen hyväksi seuraavia tietoja:

- Suorakulmion pinta-ala on ab, kun a ja b ovat suorakulmion sivujen pituudet.
- Suorakulmion lävistäjä jakaa suorakulmion kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan. (4 p.)

c) Johda puolisuunnikkaan pinta-alan kaava. (3 p.) □

Tehtävä on ns. jokeri-tehtävä, eli vaikeustasoltaan haastavampi ja tehtävästä on mahdollisuus saada yhdeksän pistettä normaalin kuuden sijasta. Tehtävän ratkaisu jakautuu kolmeen osa-kohtaan. Tutkija on laatinut tämän tehtävän b- ja c-kohtien havainnollistamiseksi tehtävän ratkaisuun liittyvät kuvat. Kuvat löytyvät tutkimuksen liittenä (Liite 3).

a. Todetaan, että tylppäkulmaisessa kolmiossa yksi kulma on suurempi kuin 90°. (BT2)

b. Määritetään kolmion CDE pinta-ala pituuksien h ja a avulla. Suorakulmion $AEFD$ pinta-ala $A_1 = a_1h$ ja Suorakulmion $EBCF$ pinta-ala $A_2 = a_2h$. Kolmion DEF pinta-ala $A_3 = \frac{A_1}{2} = \frac{a_1h}{2}$ ja kolmion CEF pinta-ala $A_4 = \frac{A_2}{2} = \frac{a_2h}{2}$, joten kolmion CDE pinta-ala $A = A_3 + A_4$ eli $A = \frac{ah}{2}$.

Seuraavaksi selvitetään kolmion pinta-alan kaava tapauksessa, jossa korkeusjana vastaa suorakulmaisen kolmion kateettia. Nyt kolmio ABD on suorakulmainen ja kulma $A = 90°$, joten kolmion kateetit ovat sivut AB ja AD. Suorakulmion $ABCD$ pinta-ala $A_1 = ah$ ja kolmion ala $A = \frac{A_1}{2}$ eli $A = \frac{ah}{2}$.

Saaduista tuloksista voidaan vielä johtaa pinta-alan lauseke siinä tapauksessa, jossa korkeusjana tulee kohtisuorasti kannan jatkeelle. Nyt kolmion kanta on $a = a_2 - a_1$ ja kolmion ADE pinta-ala $A_1 = \frac{a_1h}{2}$ ja kolmion BCD pinta-ala $A_2 = \frac{a_2h}{2}$. Suorakulmion $ABCD$ pinta-ala $A_s = a_2h$. Voidaan selvittää BDE pinta-ala $A = A_s - (A_1 + A_2) = \frac{ah}{2}$. (BT5)

c. Puolisuunnikkaan kaavan johtamisessa tulee tarkastella kahta eri tapausta. Kolmion ABD pinta-ala on molemmissa tapauksissa $A_1 = \frac{ah}{2}$. Kolmion BCD pinta-ala on molemmissa tapauksissa $A_2 = \frac{bh}{2}$. Molemmissa tapauksissa puolisuunnikkaan $ABCD$ pinta-ala $A = A_1 + A_2 = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{1}{2}(a + b)h$. (BT5)

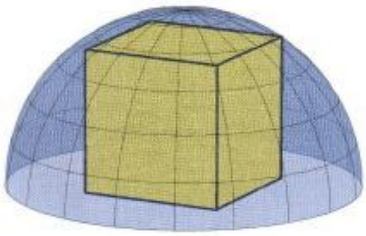
Ratkaistavissa: POM a-kohta perustiedot, muuten erityisen syventävät tiedot, LOM a-kohta perustiedot, muuten liian haastava.

k10/3a Kolmion sivujen pituudet ovat 2, 4 ja 5. Laske kolmion suurin kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella. □

Tehtävä ratkaistaan sijoittamalla annetut arvot kosinilauseen kaavaan. Ratkaisu pyöristetään oikeaan tarkkuuteen. (BT3)

Ratkaistavissa: POM perustiedot, LOM ei ratkaistavissa (kosinilause ei kuulu oppimäärään).

k10/4 Puolipallon sisällä on kuutio siten, että sen yksi sivutahko on puolipallon pohjatasolla ja vastakkaisen sivutahkon kärkipisteet ovat pallopinnalla. Kuinka monta prosenttia kuution tilavuus on puolipallon tilavuudesta?



□

Ratkaisun saamiseksi piirretään annettujen tietojen pohjalta kaksi kuvaa: toinen kuvaamaan tilannetta ylhäältä ja toinen poikkileikkauksena kuution kulmasta kulmaan (ei siis esimerkiksi keskeltä). Käytetään Pythagoraan lausetta arvojen selvittämiseen. Lasketaan kuution ja puolipallon tilavuudet ja niiden suhde. Merkitään suhde prosentteina. (BT4)

Ratkaistavissa: POM perustiedot soveltaen, LOM syventävät tiedot.

k10/10 Kolmio K_1 on tasakylkinen kolmio, jonka kanta on a ja korkeus b. Kolmio K_2 on suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat a ja b. Kummalla kolmiolla on pidempi piiri? □

Hahmotetaan ensin kolmioiden K_1 ja K_2 ominaisuudet kuvilla näkyviksi. Ratkaistaan K_1:stä Pythagoraan lauseella sivujanan pituus (huom. kolmiosta K_1 tulee kaksi suorakulmaista kolmiota jakamalla se kahtia). Selvitetään kolmion K_2 hypotenuusan lauseke Pythagoraan lauseella. Kirjoitetaan molempien piirien yhtälöt edellisten tietojen avulla. Oletetaan, että K_2:n piiri on suurempi kuin K_1:n piiri. Kirjoitetaan sen mukainen yhtälö. Ratkaistaan yhtälö ja saadaan ratkaisuksi $a^2 > 0$, mikä on tosi kaikilla $a > 0$, joten pätee $p^2 > p^1$ eli K_2:n piiri on pidempi. (BT4)

Ratkaistavissa: POM syventävät tiedot, LOM liian haastava.

8.2 Tulosten analysointi

Matematiikan lyhyen oppimäärän geometrian ylioppilaskoetehtävissä vaaditaan lyhyen oppimäärän lukijoilta vaihtelevasti niin perus- kuin syventäviäkin taitoja. Suuren osan tehtävistä pystyisi ratkaisemaan myös peruskoulun yläluokkien tiedoin, tosin usein syventävin sellaisin. Osa tehtävistä oli kuitenkin liian haastavia peruskoulun tiedoilla ratkaistavaksi tai käsiteltäviä sisältöalueita ei löytynyt perusopetuksen yläluokkien matematiikan opetuksesta. Kun lasketaan lyhyen oppimäärän Bloomin taksonomia-luokitteluiden mukaiset kaikkien geometrian tehtävien keskiarvo, saadaan luvuksi 3,6. Luku kertoo tutkijan mielestä hyvin lyhyen oppimäärän geometrian tehtävien luonteesta. Luokan BT3 tehtävät ovat tavanomaisesti ongelmia, joissa tulee hieman soveltaa oppimiaan tietoja käyttämällä oikeanlaista kaavaa oikeanlaisessa tilanteessa. BT4-luokan tehtävissä oppilaalta vaaditaan ongelman pilkkomista pienempiin osiin ja osien välisien suhteiden ymmärtämistä. Muutamissa tehtävissä päästiin BT5-tasolle, jossa oppilaan tulee olla jo luovempi ja pystyä yhdistelemään käsitteitä uudella tavalla sekä luomaan uutta tietoa annettujen tietojen pohjalta.

Pitkän oppimäärän tehtävissä tulee ratkaisun saamiseksi lähes poikkeuksetta piirtää kuva tehtävänannossa kuvaillusta tilanteesta. Vasta kuvan piirtämisen jälkeen tehtävän ratkaiseminen on mahdollista, koska silloin tehtävässä annettujen arvojen suhteet sekä merkitys vastauksen kannalta konkretisoituu tehtävän ratkaisijalle. Vain muutama pitkän oppimäärän tehtävistä oli mahdollista ratkaista lyhyen oppimäärän tiedoin. Pitkän oppimäärän tehtävät ovat joko liian haastavia tai niiden matemaattiset sisältöalueet eivät kuulu lyhyen oppimäärän sisältöihin. Kun pitkän oppimäärän tehtäviä tarkkailtiin Bloomin taksonomian mukaisten taidon osaamisen tasojen mukaisesti, tehtävät sijoittuivat taitotasoltaan syvällisemmälle tasolle kuin lyhyen oppimäärän tehtävät keskimäärin. Pitkän oppimäärän tehtävät sijoittuivat keskimäärin Bloomin taksonomian tasolle 4,1. Eli tehtävät sijoittuivat keskimäärin Bloomin taksonomian tasolle neljä. Tyypillisessä pitkän oppimäärän tehtävässä tulee Bloomin taksonomian BT4:n mukaisesti jakaa tehtävän annossa annettu tieto pienempiin osiin, löytää niistä olennaisimmat asiat sekä ymmärtää suhteet osien välillä sekä niiden yhteydet kokonaisratkaisuun. Monet tehtävät olivat edellä kuvattuja tehtäviä vielä syvällisempiä. BT5 tason tehtävissä ratkaisijan tulee olla luova sekä yhdistellä käsitteitä uudella tavalla. Yhdistelemällä ja suunnittelemalla tehtävän ratkaisija pystyy luomaan uusia ajatuksia ja kokonaisuuksia annetun tiedon pohjalta. Viidennen tason tehtävät olivat tyypillisesti todistustehtäviä.

Pitkän oppimäärän tehtävissä esiintyy myös muutama alemman tason tehtävä. BT3:n tehtävissä tulee käyttää tilanteeseen sopivaa matemaattista kaavaa sijoittaen siihen tehtävänannossa annetut arvot. Tämän tyyppisten tehtävien ratkaisu on yleensä helppoa, mutta lyhyelle oppimäärän opiskelijoille tehtävät tekee yleensä mahdottomaksi ratkaista kaavojen luonne. Nämä kaavat eivät normaalisti kuulu lyhyen oppimäärän sisältöalueisiin.

Tehtävistä löytyi lisäksi myös molemmista oppimääristä poiketen BT2 tehtävä. Tehtävä oli pitkän oppimäärän ns. jokeri-tehtävän a-kohta. Tehtävässä tulee määritellä, millainen on tylppäkulmainen kolmio. Tehtävän ratkaisuksi riittää se, että toteaa sen, että tylppäkulmaisessa kolmiossa yksi kulma on suurempi kuin 90°. Muut osa-kohdat tehtävästä kuuluvat Bloomin taksonomian viidelle tasolle. Voidaan kuitenkin huomata, että ylioppilaskokeen tehtävät eivät aina yksiselitteisesti etene alusta loppuun kohti syvällisempää tiedon tasoa. Oppilaan kannattaa siis lukea tehtävät aina loppuun asti helppojen irtopisteiden toivossa. Kaiken kaikkiaan voidaan lopuksi todeta, että pitkän oppimäärän ylioppilaskokeen geometrian tehtävissä menestyminen vaatii opiskelijalta syvällisten geometrian taitojen hallintaa sekä niiden yhdistämistä yhtälönratkaisun taitoihin. Lyhyen oppimäärän geometrian taidoin ei voi pärjätä kovinkaan menestyksekkäästi ylioppilaskokeen geometrian tehtävissä, vaikka tutkija oletti tutkimuksen alkaessa toisin.

Luku 9

Tutkimuksen luotettavuus

Olen pyrkinyt tekemään tutkimuksestani mahdollisimman luotettavan ja tarkan, jotta sen tulokset olisivat käyttökelpoisia sekä vertailukelpoisia tulevaisuudessa toteutettavia tutkimuksia varten. Tutkimuksessani on kuitenkin joitakin luotettavuutta alentavia seikkoja ja tuon ne esille seuraavissa alaluvuissa, jotta lukija voi ottaa ne huomioon lukiessaan ja mahdollisesti hyödyntäessään myöhemmin tutkimustani. Luotettavuuden tarkastelu on jaettu tutkimuksen reliaabeliuden ja validiuden tarkasteluun. Tutkimuksen reliaabeliudella tarkoitetaan tutkimuksen mittaustulosten toistettavuutta. Reliaabelin tutkimuksen tulee siis antaa ei-sattumanvaraisia tuloksia. Toisin sanoen, jos samoja ylioppilaskokeita tutkittaisiin eri tutkimuskerroilla, tulisi päätyä samaan tuloksiin. Reliaabeliutta on myös se, jos kaksi arvioijaa päätyy samanlaisiin tuloksiin. [8] Reliaabeliuden kannalta kiinnitetään siis erityistä huomiota tutkimuksessa käytettyihin menetelmiin ja mittareihin. Tämän tutkimuksen reliaabeliutta vähentävät muutamat yksittäiset toimintatavat ja käytännöt tutkimuksen toteuttamisessa.

Ensimmäisenä luotettavuutta alentava tekijä on se, että tutkimusta suoritettaessa esimerkiksi oppikirjojen ja ylioppilaskoetehtävien luokittelut syötettiin Excel-ohjelmiston taulukoihin käsin, mikä saattoi aiheuttaa virheitä, jos jokin arvo on vahingossa kirjoitettu väärin tai väärään kohtaan. Tutkija pyrki kuitenkin tarkistamaan kirjoittamansa merkinnät muutamaan kertaan. Toisena luotettavuuteen vaikuttavana tekijänä on tutkijan henkilökohtaisten mielipiteiden vaikutus tutkimustuloksiin. Tutkijan omilla näkökulmilla on voinut olla huomaamatta vaikutusta aineiston analyysin tuloksiin ja esimerkiksi ylioppilaskoetehtävien haastavuuden arviointiin. Tutkija on itse opiskellut matematiikan pitkän oppimäärän sekä yliopistomatematiikkaa. Tämä saattaa vaikuttaa siihen, että tutkijan on ollut haastavaa tarkastella luotettavasti esimerkiksi lyhyen oppimäärän ylioppilaskoetehtävien haastavuutta oppimäärää opiskelevien opiskelijoiden kannalta.

Kolmantena luotettavuuden kohdalta ongelmalliseksi osa-alueeksi tutkimuksessa nousee aineiston pieni koko. Luotettavuutta parantaisi huomattavasti se, jos tutkittavia oppikirjoja ja ylioppilaskirjoitusten kokeita olisi ollut tutkimuksessa määrällisesti enemmän. Tutkijan mielestä aineiston koko on kuitenkin sopivan kokoinen Pro Gradu tutkimusta varten. Neljäntenä reliaabeliutta alentavana tekijänä tutkimuksessa on tutkijan mahdolliset erilaiset tulkinnat esimerkiksi ylioppilaskoetehtävien kuuluvuudesta geometrian-kurssin piiriin. Tutkija joutui todella miettimään muutamien valintojensa kohdalla itsekin niiden ratkaisuja. Toinen tutkija olisi voinut tehdä joidenkin ylioppilaskoetehtävien suhteen erilaisia ratkaisuja siitä, minkä kurssin aihealueeseen kyseiset tehtävät kuuluvat. Tutkimuksessa valintaprosessi on kuitenkin tehty lukijalle hyvin läpinäkyväksi ja valintoja on perusteltu hyvin. Lisäksi tutkija on käynyt kaikki ylioppilaskoetehtävät läpi kahteen kertaan, jonka jälkeen hän on tarkastellut kurssien rajoilla sijaitsevia tehtäviä erityisellä tarkkaavaisuudella.

Validiudella tarkoitetaan tutkimusmenetelmän tai mittarin kykyä mitata juuri sitä asiaa, mitä sen on tarkoituskin mitata. Menetelmät ja mittarit eivät nimittäin aina vastaa sitä todellisuutta, jota tutkijan on tutkimuksessaan tarkoitus mitata. Lisäksi tutkija saattaa käsitellä tietyllä menetelmällä saamaansa tutkimusaineistoa edelleen oman ajatusmallinsa mukaisesti, jolloin tulokset voivat muokkautua epäpäteviksi ja virheellisiksi. [8] Tutkija on pyrkinyt tässä tutkimuksessa tarkastelemaan pääaineistoanalyysina toimineen taulukoinnin tuloksia mahdollisimman luotettavasti sekä myös löytämäänsä teoriataustaan heijastaen. Tutkimuksen validiuden kannalta hyvää tutkimuksessa on myös se, että tutkimustulokset ovat osaksi ristiriitaisia tutkijan omien ennakko-odotusten kanssa. Tämä osoittaa hyvin sitä, että kaikki tutkimustulokset eivät olleetkaan tutkijan odotusten mukaisia ja silti ne tulivat tutkimuksessa selkeästi esille.

Tutkimuksen validiutta alentaa tutkijan mielestä se, että tutkimuksessa ei ole lainkaan keskitytty geometriaan läheisesti liittyviin kursseihin, kuten kursseihin, joiden aihe-alueet ovat analyyttinen geometria ja vektorit. Tutkijan mielestä tutkimuksen otos on kuitenkin jo nyt melko monipuolinen ja kattava otos ilman muiden kurssien huomiointia. Jos tutkimukseen olisi valittu lisää aineistoa, ei aineistoa olisi voitu tarkastella näin syvällisesti ja luotettavasti Pro Gradu-tutkielman laajuuden puitteissa. Aineistoa laajentamalla tutkielmasta olisi tullut siis luultavasti pintapuolisempi ja hajanaisempi tuotos. Tutkija on myös tyytyväinen tekemäänsä rajaukseen käsitellä pelkkää geometrian kurssia. Tällöin tutkielma on tutkijan mielestä suoraviivaisempi sekä selkeämpi kokonaisuus. Tutkija on kaiken kaikkiaan tyytyväinen tutkimuksensa luotettavuuteen.

Luku 10

Yhteenveto

Matematiikan pitkä ja lyhyt oppimäärä eroavat geometria-kurssin osalta toisistaan tiettyjen sisältöalueiden osalta. Nämä eroavaisuudet ovat hyvin yhtenäiset kun tarkastellaan geometria-kurssien oppikirjoja ja verrataan niitä opetussuunnitelman perusteisiin. Olennaisimmat erot ovat seuraavat. Lyhyessä oppimäärässä matemaattisena sisältönä esiintyy geometria koordinaatistossa - aihealue, joka puuttuu pitkästä oppimäärästä. Lyhyen oppimäärän OPS asettaa käytännön läheisten geometrian ongelmien ratkaisun tavoitteeksi pitkästä oppimäärästä poiketen. Tätä selkeää eroa ei voida tehdä oppikirjavertailun perusteella. Toisaalta lyhyen oppimäärän oppikirjoista ja OPS:sta puuttuvat lähes kokonaan pitkään verrattuna seuraavat sisältöalueet ja käsitteet: sini- ja kosinilause, kappaleiden yhdenmuotoisuus, geometristen lauseiden todistaminen, kolmion pinta-alan trigonometrinen kaava, kuvioiden ja kappaleiden kulmat (syventävän matematiikan kannalta, esim. suoran ja tason välinen kulma), kulmiin liittyvät tarkemmat määritykset, ympyrä ja siihen liittyvät suorat sekä palloon liittyvät erikoistilavuudet.

Ylioppilaskirjoituksissa lyhyen oppimäärän kannalta korostuvat geometrian tehtävissä juuri OPS:ssa mainitut geometrian kurssin keskeiset sisällöt, geometriaa koordinaatistossa -aihealuetta lukuun ottamatta. Pitkän oppimäärän kokeet eivät noudata niin selkeää linjaa OPS:n keskeisten sisältöjen suhteen. Tämä voi kuitenkin johtua siitä, että ylioppilaskirjoitusten otos on tutkimuksessa suppea. Pitkän oppimäärän ylioppilaskokeiden tehtävien ratkaisemisen kannalta olennaisimmat geometrian tiedot liittyivät pinta-alan käsitteisiin sekä suorakulmaisen kolmion trigonometriaan ja ominaisuuksiin. Pitkän oppimäärän kokeissa esiintyy myös tehtäviä, joiden sisältöalueet eivät kuulu lyhyen oppimäärän opetukseen. Lyhyestä poikkeavia selkeästi esiintyviä aihealueita ovat sini- ja kosinilause sekä todistamistehtävät. Ylioppilaskoetehtävien analysoinnin ensimmäisessä vaiheessa on kuitenkin huomioitu vain sisältöalueet, ei esimerkiksi niiden vaikeustasoa.

Ylioppilaskoetehtävien syvällisemmässä tarkastelussa ilmeni, että lyhyen oppimäärän geometrian ylioppilaskoetehtävissä vaaditaan lyhyen oppimäärän lukijoilta vaihtelevasti niin perus- kuin syventäviäkin taitoja. Suuren osan tehtävistä pystyisi ratkaisemaan myös peruskoulun yläluokkien tiedoin, tosin usein syventävin sellaisin. Suurin osa tehtävistä sijoittui Bloomin taksonomian tasoille kolme ja neljä, eli tehtävissä tuli joko käyttää oikeaa kaavaa tehtävän ratkaisuun tai pilkkoa ongelma pienempiin osiin ja ymmärtää osien merkitys kokonaisratkaisun kannalta. Pitkän oppimäärän tehtävien ratkaisuun tarvittiin hieman syventävämpiä tietoja. Tehtävät sijoittuivat keskimääräisesti lyhyeen oppimäärään verrattaessa Bloomin taksonomiassa korkeammille tasoille ja tehtävissä piti normaalisti joko soveltaa ja pilkkoa tietoa tai jopa luoda uutta tietoa annettujen tietojen pohjalta. Vain muutama pitkän oppimäärän tehtävistä oli mahdollista ratkaista lyhyen oppimäärän tiedoin. Pitkän oppimäärän tehtävät ovat joko liian haastavia tai niiden matemaattiset sisältöalueet eivät kuuluneet lyhyen oppimäärän sisältöihin.

Tutkijan mielestä on hyvä selvittää eroja pitkän ja lyhyen oppimäärän geometrian kurssien välille. Erojen selvittämisestä voi olla selkeää hyötyä esimerkiksi tulevaisuuden tutkimuksille sekä lukiokurssien kehittämisprojekteille. Tulevaisuudessa voisikin olla mielenkiintoista tutkia esimerkiksi mahdollisuutta järjestää yhteinen geometrian kurssi lyhyen ja pitkän oppimäärän kesken. Tällainen kurssi voisi olla hyödyllinen esimerkiksi hyvin pienille lukioille, joissa geometrian kurssit toteutuvat harvoin. Lisäksi oppimäärille yhteinen kurssi voisi oikein toteutettuna palvella hyvin kaikkia opiskelijoita sekä luoda yhtenäisyyttä lyhyen ja pitkän oppimäärän lukijoiden kesken.

Aivan tutkimuksen viimeisinä päivinä ilmestyi Pekka Peuran kirjoittama blogi-kirjoitus aiheesta "Lukion pitkää ja lyhyttä matematiikkaa on mahdollista opettaa samaan aikaan samassa tilassa". Pekka Peura on matematiikan opettajana Martinlaakson lukiossa ja kehittää opetustyönsä ohessa uudenlaisia suuntia matematiikan opetukselle. Kirjoituksessaan Peura kertoo Martinlaakson lukiossa syksyllä 2012 tehdystä kokeilusta, jossa lukion pitkän ja lyhyen oppimäärän ensimmäisten kurssien opiskelijoita on opetettu samaan aikaan samassa tilassa. Peuran ja monien muiden matematiikan lehtoreiden mielestä kokeilu osoittautui onnistuneeksi. Kokeilun myönteisiä vaikutuksia olivat muun muassa se, ettei oppimäärästä toiseen siirtyminen edellyttänyt vaihtamaan opettajaa tai opiskelutovereita vaan riitti, että avasi toisen oppikirjan ja liimasi toisen tehtävälapun vihkoonsa. Peura kertoi iloikseen huomanneensa myös, että opiskelijat pystyivät opiskelemaan omissa pienryhmissään vieretysten molempia oppimääriä. [20]

Peura käytti kurssilla apuna MAA1- ja MAB1-kursseja yhdistävää käsitehaitaria, josta väritettiin käsitteet aina, kun oppilaat kokivat itse ymmärtävänsä kyseisen käsitteen. Käsitehaitarissa näkyi selkeästi kaikki kurssien käsitteet sekä niiden yhteydet toisiinsa. Samalla käsitehaitari opetti oppilaita havaitsemaan sen, miten paljon yhteistä on oppimäärien kyseisillä kursseilla ja miltä osin ne poikkeavat toisistaan. [20] Tämän tutkimuksen avulla pystyisi helposti luomaan samantapaisen käsitehaitarin myös lyhyen ja pitkän oppimäärän geometrian kursseista. Tutkimuksen aihe osoittautui loppumetreillä siis hyvin ajankohtaiseksi matematiikan opetuksen kehittämisen kannalta. Ehkä saamme lähitulevaisuudessa yhteisen kurssin geometriasta lyhyelle ja pitkälle oppimäärälle, joka olisi hyvin luontaista jatkoa Peuran kehittelemälle uudenlaiselle tavalle opiskella matematiikkaa.

Kirjallisuutta

[1] Aalto, A., Kangasaho, J., Kylliäinen, O., Metiläinen, A., Mäkinen, J. ja Tahvanainen, J. 2005. Lyhyt matikka 2: Geometria. Porvoo: WSOY.

[2] Alatupa, S., Hassinen, S., Hemmo-Ilvonen, K., Taskinen, T., Tolonen. T. ja Ekonen, M. 2008. Pitkä sigma 3: Geometria. Jyväskylä: WSOY.

[3] Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L. Rautakirja-Salmio, K., Tapiainen, T., Tikka, T. ja Urpiola, T. 2012. Pii 7. Keuruu: Otava.

[4] Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L. ja Tikka, T. 2007. Pii 8. Keuruu: Otava.

[5] Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L. ja Tikka, T. 2009. Pii 9. Keuruu: Otava.

[6] Hannula, M. Luento (Opetuksen arviointi ja kehittäminen) 2/2013. Bloomin taksonomian teoriaa Huitt:in (2009) mukaisesti. Helsingin yliopisto, Siltavuorenpenger.

[7] Hemmo K., Vahviainen S., Taskinen T. ja Ekonen M. 2011. Sigma 2 : Geometria. Latvia: TAMMI.

[8] Hirsjärvi, S., Remes, P. ja Sajavaara, P. 2003. Tutki ja kirjoita. Helsinki: Tammi.

[9] Juutilainen, P. 2008. Lyhyen matematiikan ylioppilaskirjoituksista. Pro gradu-tutkielma: Helsingin yliopisto.

[10] Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela, M. ja Tahvanainen, J. 2004. Pitkä matematiikka 3: Geometria. Porvoo: WSOY.

[11] Kuusalo, E. 2010. Pitkän matematiikan geometrian opetus lukiossa. Pro Gradu- tutkielma: Helsingin yliopisto.

[12] Laurinolli, T., Lindroos-Heinänen, R., Luoma-Aho, E., Sankilampi, T., Selenius, R., Talvitie, K. ja Vähä-Vahe, O. 2012. Laskutaito 7. Helsinki: SanomaPro.

[13] Laurinolli, T., Lindroos-Heinänen, R., Luoma-Aho, E., Sankilampi, T., Talvitie, K. ja Vähä-Vahe, O. 2012. Laskutaito 8. Helsinki: SanomaPro.

[14] Laurinolli, T., Lindroos-Heinänen, R., Luoma-Aho, E., Sankilampi, T., Talvitie, K. ja Vähä-Vahe, O. 2012. Laskutaito 9. Helsinki: SanomaPro.

[15] MA-FY Valmennus Oy. 2013. Mallivastaukset. www.mafyvalmennus.fi

[16] Tikkanen, G. 2010. Kemian ylioppilaskokeen tehtävät summatiivisen arvioinnin välineenä. Väitöskirja: Helsingin yliopisto.

[17] Opetushallitus 2003. Lukion opetussuunnitelman perusteet, 1-5, 106-116. www.oph.fi

[18] Opetushallitus 2004. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet. www.oph.fi

[19] Peltokangas, J. 2011. Analyyttinen geometria lukio-opetuksessa ja viime vuosien ylioppilaskirjoituksissa. Pro Gradu-tutkielma: Helsingin yliopisto.

[20] Peura, P. 2013. Lukion pitkää ja lyhyttä matematiikkaa on mahdollista opettaa samaan aikaan samassa tilassa. Blogi-artikkeli 24.3.2013, Pekka Peuran blogista: Matematiikan opetuksen tulevaisuus. http://maot.fi/author/ppeura/

[21] Ylioppilastutkintolautakunta 2012a. Pitkän matematiikan kokeen uudistaminen. www.oph.fi

[22] Ylioppilastutkintolautakunta 2012b. Kokeiden tasot. www.ylioppilastutkinto.fi

Liite 1: Matemaattisten sisältöalueiden luokittelu lukion oppikirjojen ja ylioppilaskirjoitusten pohjalta (sivu 1/3).

		lyhyt oppimäärä			pitkä oppimäärä		
matematiikan aihe-alue	**käsitteet**	**lyhyt mat. 2**	**sigma 2**	**lyhyt YO-koe**	**pitkä YO-koe**	**pitkä mat. 3**	**pitkä sigma 3**
tasogeometria							
peruskäsitteitä	piste, suora, jana		x				x
kulma	minuutti, sekunti, radiaani					x	x
	vieruskulmalause	~~	x	s11/2a		x	x
	ristikulmalause	x	x			x	x
	yhdensuuntaiset suorat	~~	x			x	x
	samankohtaiset kulmat	~	x		s11/15*	x	x
	lause samankohtaisista kulmista	x	x			x	x
	suplementtikulma komplementtikulma, eksplementtikulma				k11/7,s10/9	x	x
kolmio	kulmien summa	x	x	s11/2a, s10/2ab,s11/7		x	x
	pinta-ala	~	x	s11/3, s10/4,k10/7	s10/9, s10/15*	x	x
	pinta-alan trigonometrinen kaava				k11/7	x	x
	tasakylkinen kolmio	x	x		k10/10,k11/7	~	x
	tasasivuinen kolmio	~~	x	s12/9		~	x
	sinilause					x	x
	kosinilause				s12/4,k10/3a	x	x
	tylpän kulman sini ja kosini					x	~
	sinin ja cosinin symmetrialauseet					x	~
	kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseet				s11/15*, k11/7		~
	kolmioiden yhtenevyyslauseet						~
	kolmion merkilliset pisteet						~
	muistikolmiot					~~	~
suorakulmaisen kolmion trigonometria	tangentti, sini ja cosini	x	x	s11/7, k12/4c, k12/6, s10/2ab, s12/9, k11/2a	k11/7, s10/5, s10/9, s12/4	x	x
	Pythagoraan lause	x	x	s10/4,s10/10, s11/7,k10/7 k10/2a, s12/2b	s11/1b, k12/9,k12/15* s10/9,s12/15*, k10/4,K10/10	x	x
	Pythagoraan lauseen käänteislause					x	~~

Liite 1: Matemaattisten sisältöalueiden luokittelu lukion oppikirjojen ja ylioppilaskirjoitusten pohjalta (sivu 2/3).

		lyhyt oppimäärä			pitkä oppimäärä		
matematiikan aihe-alue	**käsitteet**	**lyhyt mat. 2**	**sigma 2**	**lyhyt YO-koe**	**pitkä YO-koe**	**pitkä mat. 3**	**pitkä sigma 3**
nelikulmio	pinta-ala	~~	x		k11/7	~~	~~
	kulmien summa	~~	x			~~	x
suorakulmio	pinta-ala	~	x	k11/4,k10/2a	s10/15*,k10/7	~~	x
suunnikas	pinta-ala	x	x	s11/3	k11/7	x	x
	kulmat	x	x		k11/7	x	~
	sivut	x	x		s11/15*	~	~
puolisuunnikas	pinta-ala	x	x	s12/9	s10/15*	x	x
monikulmio	kulmien summa	x	x	s12/9		x	x
	säännöllinen monikulmio	x	x	s12/9		x	x
kuvioiden yhdenmuotoisuus	vastinkulmat	x	x		s11/15*	x	x
	janat= yhdenmuotoisuussuhde= mittakaava	x	x	s10/4,s10/10, k11/6,s12/10	s11/15*, k12/9	x	x
	pinta-alojen suhde= pinta-alalause	x	x	k11/6		x	x
	kolmioiden yhdenmuotoisuus-lause (kk)	x	x	s10/10,s12/10	k12/9	x	x
	janojen pituuksien määrittäminen (verranto)	x	~	s10/4,s10/10, k11/6,s12/10	s11/15*, k12/9	x	~
kappaleiden yhdenmuotoisuus	tilavuuslause		~~			x	x
ympyrä	säde, keskipiste, jänne, kehä halkaisija,keskuskulma	x	x	s10/2ab, s12/9	s10/9	x	x
	kehän pituus	x	x	s10/2ab		x	x
	pinta-ala	x	x	s10/2ab, s12/9	k12/9, s10/9,k11/4	x	x
	kaaren pituus	x	x			x	x
	sektorin pinta-ala	x	x		s10/9	x	x
	segmentin pinta-ala	x	x			~	x
	tangentti	x	x			x	x
	tangenttikulma	~	x			~	x
	kehäkulma					x	x
	kehäkulmalause					x	x
	puoliympyrän kehäkulmalause					x	x
	vastaavat kehäkulmat yhtä suuret-lause					x	x

Liite 1: Matemaattisten sisältöalueiden luokittelu lukion oppikirjojen ja ylioppilaskirjoitusten pohjalta (sivu 3/3).

		lyhyt oppimäärä			pitkä oppimäärä		
matematiikan aihe-alue	**käsitteet**	**lyhyt mat. 2**	**sigma 2**	**lyhyt YO-koe**	**pitkä YO-koe**	**pitkä mat. 3**	**pitkä sigma 3**
avaruusgeometria							
kulma	avaruussuorien välinen kulma					~	x
	suoran ja tason välinen kulma					x	x
	kahden tason välinen kulma					x	x
pallo	pikkuympyrä, isoympyrä	x	x			x	x
	maapallon piirit	x	x			x	x
	tilavuus	x	x	s11/8,s10/10	k10/4	x	x
	pinta-ala	x	x	s11/8	s12/15*	x	x
pallokalotti	pinta-ala					x	x
pallosegmentti	tilavuus					x	x
lieriö	tilavuus	x	x			x	x
	vaipan pinta-ala	~	x			~~	x
suora lieriö	vaipan pinta-ala	x	~			x	x
suora ympyrälieriö	vaipan pinta-ala	~	x		s12/15*	~	x
	tilavuus	~	x	s12/10		~~	x
suorakulmainen särmiö	Pythagoraan lause avaruudessa	~~	~~			x	x
	tilavuus	x	x		k10/4	x	x
kartio	tilavuus	x	x	s10/10		x	x
suora ympyräkartio	vaipan pinta-ala,sivujana	x	x		k12/9	x	x
	tilavuus	x	x	s12/10,k10/10		x	x
pyramidi	korkeusjana	~	x			~	x
	vaipan pinta-ala	x	x			~~	~
säännöllinen pyramidi	korkeusjana,tilavuus	x	~			~	x
muuta	yksikkömuunnokset	~~	x	monissa teht.	monissa teht.	~	~~
	historiaa	~~	x			~	
	geometriaa koordinaatistossa	~~	~~	k12/4c			
	todistaminen	1% teht.	1,5% teht.		s11/15*, k12/15* s10/15*	7,8% teht.	5,5% teht.

Liite 2: Matemaattisten sisältöalueiden luokittelu peruskoulun yläluokkien ja lukion oppikirjojen pohjalta (sivu 1/3).

		PERUSKOULU		LUKIO			
		yläluokat 7-9		lyhyt oppimäärä		pitkä oppimäärä	
matematiikan aihe-alue	**käsitteet**	**Laskutaito 7-9**	**Pii 7-9**	**Lyhyt mat. 2**	**Sigma 2**	**Pitkä mat. 3**	**Pitkä sigma 3**
tasogeometria							
peruskäsitteitä	piste, suora, jana	7	7, ~~8		x		x
kulma	minuutti, sekunti, radiaani					x	x
	vieruskulmalause	7	7	~~	x	x	x
	ristikulmalause	7	7	x	x	x	x
	yhdensuuntaiset suorat	7	7, ~~8	~~	x	x	x
	samankohtaiset kulmat	7	7	~	x	x	x
	lause samankohtaisista kulmista	7		x	x	x	x
	suplementtikulma komplementtikulma, eksplementtikulma					x	x
kolmio	kulmien summa	7, ~~8,~~9	7, ~~8, 9	x	x	x	x
	pinta-ala	7, 8, ~~9	8, ~9	~	x	x	x
	pinta-alan trigonometrinen kaava					x	x
	tasakylkinen kolmio	7, ~~8, ~~9	7, ~~8, ~~9	x	x	~	x
	tasasivuinen kolmio	7	7, ~~8, ~~9	~~	x	~	x
	sinilause					x	x
	kosinilause					x	x
	tylpän kulman sini ja kosini					x	~
	sinin ja cosinin symmetrialauseet					x	~
	kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseet						~
	kolmioiden yhtenevyyslauseet						~
	kolmion merkilliset pisteet	~~8	~~7, ~~9				~
	muistikolmiot					~~	~
suorakulmaisen kolmion trigonometria	tangentti, sini ja cosini	9	9	x	x	x	x
	Pythagoraan lause	8, 9	8, 9	x	x	x	x
	Pythagoraan lauseen käänteislause	~~8	8			x	~~

Liite 2: Matemaattisten sisältöalueiden luokittelu peruskoulun yläluokkien ja lukion oppikirjojen pohjalta (sivu 2/3).

		PERUSKOULU		LUKIO			
		yläluokat 7-9		lyhyt oppimäärä		pitkä oppimäärä	
matematiikan aihe-alue	**käsitteet**	**Laskutaito 7-9**	**Pii 7-9**	**Lyhyt mat. 2**	**Sigma 2**	**Pitkä mat. 3**	**Pitkä sigma 3**
nelikulmio	pinta-ala	~~8, ~~9	~~8, ~~9	~~	x	~~	~~
	kulmien summa	7	7	~~	x	~~	x
suorakulmio	pinta-ala	7, ~~9	~~8, ~~9	~	x	~~	x
suunnikas	pinta-ala	7, ~~9	~~9	x	x	x	x
	kulmat	7		x	x	x	~
	sivut	7	7	x	x	~	~
puolisuunnikas	pinta-ala	7, ~~8, ~~9	~~8, ~~9	x	x	x	x
monikulmio	kulmien summa			x	x	x	x
	säännöllinen monikulmio	7	7, ~~8	x	x	x	x
kuvioiden yhdenmuotoisuus	vastinkulmat	8, ~~9	8, 9	x	x	x	x
	janat= yhdenmuotoisuussuhde= mittakaava	8, ~~9	8, ~9	x	x	x	x
	pinta-alojen suhde= pinta-alalause		~~8	x	x	x	x
	kolmioiden yhdenmuotoisuus-lause (kk)	8, ~9	9	x	x	x	x
	janojen pituuksien määrittäminen (verranto)	8, ~9	8, ~9	x	~	x	~
kappaleiden yhdenmuotoisuus	tilavuuslause		~~8		~~	x	x
ympyrä	säde, keskipiste, jänne, kehä halkaisija,keskuskulma	7, 8	7, 8, ~9	x	x	x	x
	kehän pituus	8	8, ~~9	x	x	x	x
	pinta-ala	8, ~~9	8, ~9	x	x	x	x
	kaaren pituus	8	8	x	x	x	x
	sektorin pinta-ala	8	8	x	x	x	x
	segmentin pinta-ala	~~8	8, ~~9	x	x	~	x
	tangentti	7, ~~9	8	x	x	x	x
	tangenttikulma	~~8	8	~	x	~	x
	kehäkulma	8	8			x	x
	kehäkulmalause	8	8			x	x
	puoliympyrän kehäkulmalause	~~8	8			x	x
	vastaavat kehäkulmat yhtä suuret-lause	8	8			x	x

Liite 2: Matemaattisten sisältöalueiden luokittelu peruskoulun yläluokkien ja lukion oppikirjojen pohjalta (sivu 3/3).

		PERUSKOULU		LUKIO			
		yläluokat 7-9		lyhyt oppimäärä		pitkä oppimäärä	
matematiikan aihe-alue	**käsitteet**	**Laskutaito 7-9**	**Pii 7-9**	**Lyhyt mat. 2**	**Sigma 2**	**Pitkä mat. 3**	**Pitkä sigma 3**
avaruusgeometria							
kulma	avaruussuorien välinen kulma					~	x
	suoran ja tason välinen kulma					x	x
	kahden tason välinen kulma					x	x
pallo	pikkuympyrä, isoympyrä	9	~~7	x	x	x	x
	maapallon piirit	8	~~7, ~~9	x	x	x	x
	tilavuus	9	9	x	x	x	x
	pinta-ala	9	9	x	x	x	x
pallokalotti	pinta-ala					x	x
pallosegmentti	tilavuus					x	x
lieriö	tilavuus	9	9	x	x	x	x
	vaipan pinta-ala	9	9	~	x	~~	x
suora lieriö	vaipan pinta-ala	~9	~9	x	~	x	x
suora ympyrälieriö	vaipan pinta-ala	9	9	~	x	~	x
	tilavuus	9	9	~	x	~~	x
suorakulmainen särmiö	Pythagoraan lause avaruudessa	~~9	~~8, ~~9	~~	~~	x	x
	tilavuus	9	9	x	x	x	x
kartio	tilavuus	9	9	x	x	x	x
suora ympyräkartio	vaipan pinta-ala,sivujana	9	9	x	x	x	x
	tilavuus	9	9	x	x	x	x
pyramidi	korkeusjana	~9	9	~	x	~	x
	vaipan pinta-ala	9	9	x	x	~~	~
säännöllinen pyramidi	korkeusjana,tilavuus	~9	~~9	x	~	~	x
muuta	yksikkömuunnokset	7, 8, ~9	~~8, 9	~~	x	~	~~
	historiaa	~~	~~	~~	x	~	
	geometriaa koordinaatistossa	7	7, 8, ~9	~~	~~		
	todistaminen	~~	~~	1% teht.	1,5% teht.	7,8% teht.	5,5% teht.

Liite 3: Tehtävän S10/15* ratkaisuun liittyvät kuvat.